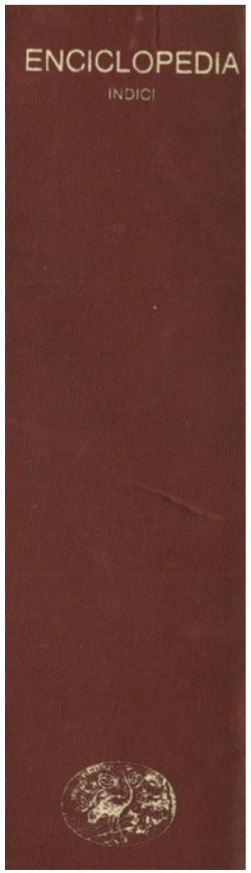


ENCICLOPEDIA EINAUDI [1982]

GEOMETRIA E TOPOLOGIA

Massimo Galuzzi - **GEOMETRIA E TOPOLOGIA** pag.4

Massimo Galuzzi - **CURVE E SUPERFICI** pag.9

Giuseppe Geymonat, Aristide Sanini, Paolo Valabrega
GEOMETRIA E TOPOLOGIA pag.29

Claudio Procesi - **INVARIANTE** pag.83

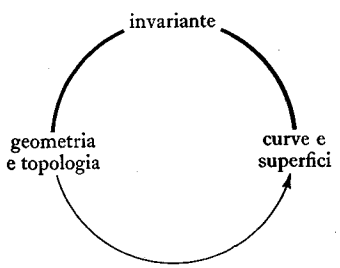
	anthropos	argomentazione	arti	calcolo	capitale	cervello	civiltà	classi	cognizione	combinatoria	comunicazione	concetto	conoscenza	corpo	creatività	cultura mat.
curve e superfici	·	·	·	3	7	·	·	·	3	5	2	2	3	·	2	·
geometria e topologia	2	·	3	6	·	3	·	2	4	7	2	5	7	·	6	·
invariante	·	·	·	4	·	·	·	·	·	3	·	4	·	·	2	·

	dialettica	domesticam.	eccedente	enunciazione	eredità	esoterico/essoter.	evoluzione	filosofia/filosofie	fisica	generazioni	geometria e topol.	giustizia	guerra	homo	inconscio	letteratura	linguaggio	locale/globale	logica	macchina	materia
curve e superfici	6	·	·	·	·	·	·	·	7	·	9	·	·	·	·	·	2	9	·	1	7
geometria e topologia	8	·	·	·	·	4	2	5	6	·	8	4	2	·	·	2	3	9	6	5	7
invariante	6	·	·	·	·	·	·	·	6	·	7	·	·	·	·	·	·	7	4	·	4

	memoria	metodo	modo di produz.	mythos/logos	natura	normale/anormale	orale/scritto	organico/inorgan.	organismo	parentela	politica	probabilità	produzione/distrib.	regione	religione	rito
curve e superfici	·	4	·	·	4	·	·	·	5	·	·	7	·	2	·	·
geometria e topologia	·	7	·	·	6	3	3	5	5	·	4	·	·	5	·	·
invariante	·	3	·	·	·	·	1	·	3	·	·	3	·	·	·	·

	sacro/profano	segno	sistema	società	soma/psiche	spiegazione	stato	storia	strutture matem.	sviluppo/sottosvil.	tempo/temporalità	teoria/modello	testo	tolleranza/intoll.	tonale/atonale	tradizioni	universo	uomo	visione	vita/morte
curve e superfici	·	·	6	2	·	2	·	2	6	·	5	2	·	·	·	·	7	·	2	·
geometria e topologia	·	3	·	·	·	6	·	4	9	·	6	5	·	·	·	·	5	5	5	2
invariante	·	·	5	3	·	2	·	2	7	·	2	·	3	·	·	·	2	·	·	·

	invariante	geometria e topologia	curve e superfici
invariante	·	7	4
geometria e topologia	7	·	6
curve e superfici	6	·	·



Geometria e topologia

Geometria e topologia

curve e superfici
geometria e topologia
invariante
differenziale
funzioni
infinitesimale
locale/globale
sistemi di riferimento
stabilità/instabilità
variazione
applicazioni
assioma/postulato
continuo/discreto
dipendenza/indipendenza
divisibilità
dualità
insieme
razionale/algebrico/trascendente
simmetria
strutture matematiche
trasformazioni naturali / categorie
analogico/digitale
automa
intelligenza artificiale
macchina
programma
simulazione
strumento
controllo/retroazione
energia
equilibrio/squilibrio
interazione
ordine/disordine
organizzazione
semplice/complesso
sistema
soglia
vincolo
astronomia
cosmologie
gravitazione
luce
materia
spazio-tempo
atmosfera
litosfera
oceani
pianeti
sole
universo
decisione
distribuzione statistica
giochi
induzione statistica
probabilità
rappresentazione statistica
teoria/pratica
deduzione/prova
equivalenza
formalizzazione
logica
possibilità/necessità
referenza/verità
ricorsività
centrato/acentrato
combinatoria
grafo
labirinto
rete
abaco
algoritmo
approssimazione
calcolo
numero
zero
astratto/concreto
dialettica
identità/differenza
mediazione
opposizione/contraddizione
qualità/quantità
totalità
uno/molti
caos/cosmo
infinito
macrocosmo/microcosmo
mondo
natura
osservazione
reale
unità
analisi/sintesi
anticipazione
ipotesi
matematiche
metodo
concetto
esistenza
essere
fenomeno
forma
idea
proposizione e giudizio
analogia e metafora
argomentazione
interpretazione
ambiguità
competenza/esecuzione
fonetica
grammatica
lessico
lingua
lingua/parola
linguaggio
metrica
semantica
senso/significato
traduzione
universali/particolari
atti linguistici
dicibile/indicibile
enunciazione
presupposizione e allusione
referente
comunicazione
errore
informazione
dato
etica
filosofia/filosofie
ragione
razionale/irrazionale
soggetto/oggetto
uguaglianza
valori
vero/falso
volontà
catastrofi
ciclo
evento
periodizzazione
tempo/temporalità
antico/moderno
calendario
decadenza
escatologia
età mitiche
genesi
passato/presente
progresso/reazione
storia
alchimia
astrologia
cabala
elementi
esoterico/essoterico
atlante
collezione
documento/monumento
fossile
memoria
rovina/restauro
armi
frontiera
guerra
imperi
nazione
tattica/strategia
funzione
misura
modello
struttura
teoria/modello
alienazione
coscienza/autocoscienza
immaginazione sociale
pace
servo/signore
uomo
utopia
demagogia
discriminazione
repressione
terrore
tolleranza/intolleranza
tortura
violenza
caso/probabilità
causa/effetto
certezza/dubbio
coerenza
convenzione
determinato/indeterminato
empiria/esperienza
esperimento
legge
libertà/necessità
metafisica
naturale/artificiale
operatività
paradigma
previsione e possibilità
riduzione
ripetizione
scienza
spiegazione
verificabilità/falsificabilità
categorie/categorizzazione
conoscenza
coppie filosofiche
disciplina/discipline
enciclopedia
innovazione/scoperta
insegnamento
invenzione
rappresentazione
ricerca
sistematica e classificazione
cervello
comportamento
e condizionamento
controllo sociale
emozione/motivazione
mente
apprendimento
autoregolazione/equilibrazione
cognizione
induzione/deduzione
innato/acquisito
istinto
operazioni
percezione
quoziente intellettuale
atomo e molecola
conservazione/invarianza
entropia
fisica
forza/campo
moto
particella
plasma
propagazione
quanti
relatività
reversibilità/irreversibilità
stato fisico
adattamento
evoluzione
mutazione/selezione
polimorfismo
specie
cellula
differenziamento
immunità
individualità biologica
integrazione
invecchiamento
organismo
regolazione
sviluppo e morfogenesi
catalisi
macromolecole
metabolismo
omeostasi
organico/inorganico
osmosi
vita
eredità
gene
genotipo/fenotipo
razza
sangue
allegoria
codice
immagine
metafora
segno
significato
simbolo
alfabeto
ascolto
gesto
lettura
luogo comune
orale/scritto
parola
ritmo
scrittura
voce
avanguardia
classico
critica
filologia
letteratura
maniera
poetica
retorica
bello/brutto
creatività
espressione
fantastico
gusto
imitazione
immaginazione
progetto
riproduzione/riproducibilità
sensibilità
spazialità
discorso
finzione
generi
narrazione/narratività
stile
tema/motivo
testo
arti
artigianato
artista
attribuzione
oggetto
produzione artistica
anthropos
cultura/culture
etnocentrismi
natura/cultura
acculturazione
civiltà
futuro
selvaggio/barbaro/civilizzato
armonia
melodia
ritmica/metrica
scala
suono/rumore
tonale/atonale
colore
disegno/progetto
visione
abbigliamento
canto
corpo
danza
maschera
moda
ornamento
scena
escrementi
fertilità
nascita
sensi
sessualità
vecchiaia
vita/morte
educazione
generazioni
infanzia
morte
coltivazione
cultura materiale
industria rurale
materiali
prodotti
credenze
dialetto
enigma
fiaba
mostro
popolare
proverbi
tradizioni
amore
desiderio
eros
isteria
pulsione
soma/psiche
sonno/sogno
cannibalismo
dèi
divino
eroi
iniziazione
magia
messia
millennio
persona
puro/impuro
religione
sogno/visione
stregoneria
angoscia/colpa
castrazione e complesso
censura
identificazione e transfert
inconscio
nevrosi/psicosi
piacere
clinica
cura/normalizzazione
esclusione/integrazione
farmaco/droga
follia/delirio
medicina/medicalizzazione
normale/anormale
salute/malattia
sintomo/diagnosi
fuoco
homo
mano/manufatto
tecnica
utensile
ateo
chierico/laico
chiesa
diavolo
eresia
libertino
libro
peccato
sacro/profano
santità
demoni
divinazione
mito/rito
mythos/logos
origini
agonismo
cerimoniale
festa
feticcio
gioco
lutto
regalità
rito
casta
donna
endogamia/esogamia
famiglia
incesto
maschile/femminile
matrimonio
parentela
totem
uomo/donna
alimentazione
animale
cucina
domesticamento
fame
vegetale
caccia/raccolta
dono
eccedente
pastorizia
primitivo
reciprocità/ridistribuzione
consenso/dissenso
egemonia/dittatura
intellettuali
libertà
maggioranza/minoranza
partiti
politica
borghesi/borghesia
burocrazia
classi
contadini
ideologia
masse
proletariato
rivoluzione
economia
formazione economico-sociale
lavoro
modo di produzione
proprietà
riproduzione
transizione
abbondanza/scarsità
bisogno
consumo
imposta
lusso
oro e argento
pesi e misure
produzione/distribuzione
ricchezza
scambio
spreco
consuetudine
diritto
giustizia
istituzioni
responsabilità
amministrazione
comunità
conflitto
costituzione
democrazia/dittatura
norma
patto
potere
potere/autorità
pubblico/privato
società civile
stato
élite
gergo
gruppo
marginalità
opinione
povertà
propaganda
ruolo/status
socializzazione
società
spazio sociale
accumulazione
capitale
crisi
distribuzione
fabbrica
gestione
imperialismo
impresa
mercato
merce
moneta
pianificazione
profitto
rendita
salario
utilità
valore/plusvalore
abitazione
acqua
ambiente
città
clima
ecumene
insediamento
migrazione
paesaggio
popolazione
regione
risorse
suolo
terra
territorio
villaggio
agricoltura
città/campagna
colonie
commercio
industria
spazio economico
sviluppo/sottosviluppo

Geometria e topologia

Curve e superfici, Geometria e topologia, Invariante

Si è spesso osservato come la matematica, in confronto ad altri ambiti conoscitivi, abbia, all'apparenza, una caratterizzazione molto particolare. Sembra infatti che in essa profondi rivolgimenti, radicali cambiamenti di punti di vista, sovvertimenti profondi insomma, si risolvano poi, in qualche modo, in un accrescimento «cumulativo» delle conoscenze.

Al termine del mutamento si presenta l'immagine d'una piú vasta e piú organica totalità ove nuovi «oggetti» sono aggiunti ai precedenti. E questi ultimi appaiono, nella totalità, quasi come il frutto di arbitrarie limitazioni, quasi frutto di preclusioni «ideologiche».

Certo questa è una radicale semplificazione del procedere delle conoscenze matematiche, e se anche si qualificasse questa determinazione, affatto generale, in modo da ottenere particolari tipologie, si sarebbe ben lontani dalla concretezza del processo. Le argomentazioni successive sono dunque «esempi», con tutto ciò che di limitante il concetto di esempio reca con sé, e come tali vanno considerate.

Descartes, all'inizio del secondo libro della sua *Géométrie* (1637), riflettendo sulla divisione tradizionale delle curve (cfr. ♦Curve e superfici♦) in «geometriche» e «meccaniche» – che egli forse enfatizza, amplificando un celebre luogo di Pappo –, ricercando il senso di tale divisione, giunge a criticarne il fondamento stesso: «Non saprei capire perché le abbiano chiamate Meccaniche, piuttosto che Geometriche. Perché, dicendo che era a causa del fatto che c'era bisogno di qualche macchina per descriverle, occorrerebbe respingere, per la stessa ragione, il cerchio e le linee rette, visto che si descrivono sulla carta solo con il compasso o con la riga, che si possono pure chiamare macchine».

La critica cartesiana allarga enormemente l'ambito della geometria (cfr. ♦Geometria e topologia♦): «Non c'è bisogno di supporre altro, per tracciare tutte le linee curve che io pretendo qui di introdurre, se non che due o piú linee possano essere mosse l'una mediante l'altra, e che le loro intersezioni determinino altre curve».

Nella nuova geometria che si viene a costruire le curve precedenti, con poche eccezioni, hanno pieno titolo di legittimità, ma accanto ad esse ve ne sono altre. Tra queste ultime alcune, già note agli antichi, erano escluse per ragioni che al vaglio di un'attenta disamina non appaiono piú sostenibili.

Sembra che non il concetto di curva sia messo in discussione da Descartes – o almeno non questo principalmente – ma la sua estensione: si tratta di riconoscere che le curve legittime sono assai piú di quelle considerate tali dagli antichi.

In breve volgere di anni, con il calcolo differenziale, si avrà una ulteriore cosí radicale crescita della quantità di curve da considerarsi, che l'estensione

cartesiana sembrerà poca cosa. In termini moderni, se si pensa una curva data da una coppia di equazioni

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

appaiono «escluse» da Descartes quelle curve per le quali non c'è un'equazione algebrica che leghi dx/dt e dy/dt. Letta alla luce del calcolo differenziale, la limitazione cartesiana appare cosí artificiosa che non pochi studiosi presenteranno l'opera di Descartes come intesa a delimitare arbitrariamente il patrimonio di curve del quale egli poteva disporre. Inutile indulgere a facili ironie sul «senno di poi». Piú utile invece osservare come il meccanismo di crescita dell'estensione del concetto di curva che si ha con il calcolo differenziale sembra consistere ancora nell'aggiunta di nuovi enti.

L'evoluzione del concetto di continuità, dal primitivo senso settecentesco a quello di Cauchy e poi di Weierstrass, si lega intimamente a un'altra importante suddivisione: se s'intende per curva una coppia di funzioni continue $x(t)$, $y(t)$, l'ente che cosí viene a definirsi non è in generale una curva dotata di tangente: continuità e derivabilità sono concetti separati.

Ma quante determinazioni apparentemente legate alla continuità si rivelano illusorie! «Essendo dato un arco di curva continua, senza fare ipotesi ulteriori, non è sempre possibile racchiuderlo in un'area arbitrariamente piccola», osserva Peano in una celebre memoria del 1890. Una curva data da $x(t)$ e $y(t)$ continue, con t variabile in $(0, 1)$ può essere tale che il suo grafico passa per tutti i punti (x, y) con $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Il suo grafico è quindi il quadrato stesso, questo l'esempio della celebre «curva di Peano».

È fin troppo ovvio che una scienza ove la «curva di Peano» è una curva legittima non si ottiene per semplice estensione quantitativa del concetto di ♦curva♦. Quando si considera però, per fare un esempio, la circonferenza come una curva algebrica; tra le curve algebriche una curva del secondo ordine; e tra queste, cioè tra le curve del tipo $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, caratterizzata da $a=c$ e $b=0$, la circonferenza che viene cosí ad aversi non è del tutto identica alla curva oggetto della XV definizione del primo libro degli *Elementi*?

Un oggetto dato quasi come primitivo negli *Elementi* è certo differente dall'identico oggetto quale ci appare carico di molteplici determinazioni. Ma è innegabile che queste determinazioni lasciate progressivamente cadere sembrano inserire l'oggetto prima, e poi le sue estensioni, in ambiti sempre piú vasti.

Si può osservare tuttavia che per quanto il concetto di curva svolga un ruolo assai importante nella matematica, tuttavia esso non corrisponde a una partizione disciplinare. Questo, in qualche modo, può indebolire il senso dell'esempio precedente: un singolo oggetto può ben essere un'eccezione!

Si consideri allora, accanto a questo esempio, il sorgere della ♦geometria♦ non-euclidea ove è ben chiaro che, questa volta, un'intera disciplina è posta in discussione.

Fin dall'antichità si hanno tentativi per dimostrare come il quinto postulato debba conseguire dai precedenti. Esso sembra «vero», della stessa verità delle

altre assunzioni. Che la somma degli angoli d'un triangolo debba valere due retti è un fatto usato come il paradigma della verità stessa. E non solo questo enunciato, ma tanti altri del pari equivalenti al postulato in questione, sembrano cosí carichi di evidenza da suggerire che debba pur esservi un modo per dimostrarli. Nel 1733, nell'anno stesso della sua morte, il gesuita Saccheri, riprendendo le idee della sua giovanile e fondamentale *Logica demonstrativa* (1697), dà infine alle stampe l'*Euclides ab omni naevo vindicatus*.

L'idea di Saccheri è che il postulato in questione sia «talmente vero» che esso debba scaturire dalla sua propria negazione. Come le entità eterne per san Tommaso: l'essere deve seguire anche dall'ipotesi che venga negato l'essere stesso. Si tratta dello schema della «consequentia mirabilis», che Saccheri, come egli stesso dichiara, ricava dal commento di Clavio alla IX, 12 degli *Elementi*, ma che probabilmente gli era familiare anche per i suoi studi teologici. Quest'idea dimostrativa, già usata nella *Logica*, anima di un grande pathos il suo *Euclides*, ove Saccheri riesce a dimostrare che l'ipotesi della geometria ellittica è incompatibile con l'infinità della retta. Ma fallisce, naturalmente, con la geometria iperbolica. Cerca di dedurre il postulato in questione dall'«essenza» della retta, cerca di applicarvi il calcolo differenziale che pure non maneggia appieno e cade in un errore. Beltrami, che avrà tuttavia il grande merito di riproporre agli studiosi l'opera di Saccheri, non esita ad ironizzarvi. Ma Saccheri era a tal punto appassionato della questione da non esitare a correre dei rischi per stabilire la «verità».

Che è rimasto di questo pathos quando Klein scrive il programma di Erlangen, nel 1872? La V nota che egli appone al programma ha per titolo *Sulla cosí detta Geometria non Euclidea*, e vi si legge questa sobria osservazione: «Le ricerche sulla teoria delle parallele cui noi alludiamo hanno progredito in modo da raggiungere matematicamente da due lati un valore preciso. Esse mostrano una buona volta – e questo loro ufficio può considerarsi come relativo al passato, ed ora esaurito – che l'assioma delle parallele non è conseguenza matematica di quelli che generalmente gli si premettono... Inoltre tali ricerche ci hanno fatto dono di un prezioso concetto matematico, quello di varietà a curvatura costante». In che consiste il darsi d'una geometria ellittica, iperbolica o euclidea? Nell'essere la curvatura totale maggiore, minore, oppure uguale a 0. Ecco infine l'«essenza della questione».

Cosí semplificando certo si è giunti al paradosso. Lo stesso Klein osserva sí che al matematico *come tale* non deve interessare la questione dei fondamenti matematici sui quali debba appoggiarsi l'assioma delle parallele, ma non certo per escludere come oggetto di studio i fondamenti piú generali delle nostre cognizioni.

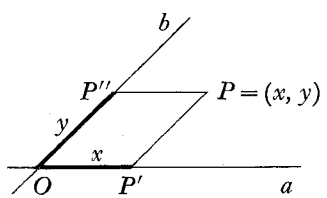
Ma certamente al tentativo appassionato, e talora drammatico, di dimostrare l'intera verità della geometria euclidea viene a sostituirsi una situazione ove sussistono «piú» ♦geometrie♦. Dapprima antagoniste e sostenute o negate con polemiche accese, poi pacificamente coesistenti, come appunto s'è visto riflettersi nelle parole di Klein.

Si tornerà tra breve sul programma di Klein, ma preme ancora osservare come nella nuova situazione creatasi la «nuova» geometria euclidea appare del tutto immutata. Si ha conferma del fatto che un postulato è appunto tale. Nella forma di Playfair esso è: «Dati una retta ed un punto fuori di essa, esiste una ed una sola retta per il punto dato parallela alla retta data». Ebbene, se si sostituisce alla richiesta «una ed una sola», «nessuna», oppure «almeno una», si ottengono teorie non contraddittorie. Non solo: all'interno della geometria euclidea è possibile costruire dei modelli (la sfera e la pseudosfera nel caso piano) per le nuove geometrie. Ma se si accetta che vi sia una ed una sola parallela, allora si ha esattamente la geometria degli *Elementi*.

Si è visto l'evolversi di una disciplina in «piú» discipline, attraverso l'analisi d'uno dei suoi presupposti. Ma il fondamento di una disciplina può essere indagato anche in diversa maniera, studiando la ragione piú profonda del successo dei suoi meccanismi operativi. Poncelet, nel suo celebre *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), si pone il problema della buona riuscita della geometria analitica, che ha «mezzi generali e uniformi per giungere alla soluzione delle questioni che si presentano nella ricerca delle proprietà delle figure» in confronto alla geometria sintetica che «procede a caso», seguendo un cammino che «dipende completamente dalla sagacia di colui che lo segue».

Procedendo nella sua analisi raffinata, Poncelet ha modo di mettere in evidenza il ruolo fondamentale del «principio di continuità», ma ancor piú pregnante diviene il suo discorso allorché egli esamina i meccanismi primordiali che sono alla base della geometria descrittiva e della geometria analitica (metodo delle coordinate): «Riflettendo attentamente su ciò che costituisce il principale vantaggio della Geometria descrittiva e del Metodo delle coordinate, a ciò che fa sí che queste branche delle Matematiche offrano il carattere di una vera e propria dottrina... non si tarda a riconoscere che ciò consegue unicamente dall'uso che esse fanno della proiezione».

Si esamini il caso della geometria analitica, nel piano. Cosa è alla base dell'intero procedere? Assegnate due rette a, b, che s'intersecano in O, per ogni punto P risulta assegnata una coppia di numeri x, y considerando per P le parallele alle rette b ed a, come suggerisce la figura:



In tal modo punti e coppie di numeri si corrispondono perfettamente, tanto che il piano si pensa identico alle coppie di numeri reali.

Ma il modo con il quale a P si assegna una coppia di numeri, per quanto semplice, è suscettibile di analisi ulteriore. Prima dei numeri x e y, si hanno dei punti, P' e P'', ottenuti proiettando P lungo le direzioni di b e di a. Il processo rivela un'operazione primordiale: il proiettare. Questa operazione di proiezione

e la sua correlativa di sezione, analizzate secondo le loro proprietà, dànno luogo a una «dottrina delle proiezioni», la geometria proiettiva.

L'analisi di Poncelet, sulle ragioni dei successi della geometria analitica, finisce con il dar luogo a una nuova geometria interamente diversa.

L'indirizzo sintetico e quello analitico coesistono dapprima, e si fronteggiano talora nelle polemiche di studiosi sostenitori dell'uno o dell'altro indirizzo. Ancora Klein, con la prima nota del suo programma – *Sul contrasto fra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna* –, dà conto dell'evoluzione successiva: «La differenza fra la nuova geometria sintetica e la nuova geometria analitica non deve piú considerarsi oggigiorno come essenziale, poiché i concetti e le argomentazioni si sono informati a poco a poco dall'una e dall'altra parte in modo affatto simile».

Con «geometria proiettiva» Klein indica perciò entrambe le discipline, e, «se il metodo sintetico procede di piú per mezzo dell'intuizione dello spazio», tuttavia «le formole della geometria analitica si possono concepire come espressione esatta e trasparente delle relazioni geometriche».

Con il sorgere delle geometrie non-euclidee, con la geometria proiettiva e poi con la prima sintesi del programma di Klein, sembra aver luogo un processo che troverà, si dice spesso, il suo termine naturale con i *Fondamenti della geometria* (*Grundlagen der Geometrie*, 1899) di Hilbert: il distacco della geometria dall'evidenza intuitiva. La geometria non dovrebbe piú avere il suo punto di partenza nella realtà visibile o ideale. Si tratta, stabilito un sistema di assiomi, di dedurre da questi le proposizioni geometriche.

Bisogna essere molto cauti nel cogliere il senso di queste affermazioni che sono spesso ripetute in modo acritico: nelle impostazioni prima di Hilbert gli enti geometrici venivano definiti («Punto è ciò che non ha parti», negli *Elementi*) attraverso proposizioni che s'immaginava dovessero dar luogo a una chiara ed inequivocabile identificazione degli enti in questione. Ora, l'idea di Hilbert, al di là di certe formulazioni talora semplificate, è che il concetto degli enti geometrici non è esaurito dalla loro definizione, ed anzi questa, dando di esso una minima parte, può anche sopprimersi; il concetto è frutto dell'*intero discorso geometrico* che su di essi viene fatto. Ogni proposizione geometrica che venga dimostrata, ricorrendo agli assiomi, provvede a completare e determinare quei concetti che all'inizio possono ben essere puri nomi.

Come ben si vede, non solo questa posizione non è in contrasto con l'avere la realtà come punto di partenza, ma essa della realtà coglie l'aspetto piú profondo, che consiste nell'essere il reale frutto di molteplici determinazioni.

E in questo senso l'opera di Hilbert è realmente il punto terminale d'uno sviluppo. Naturalmente oggetto dell'opera di Hilbert non è piú un'unica geometria e vi sono considerate non solo geometrie non-euclidee, ma anche non-archimedee, non-desarguesiane, ecc. Se in esse si parla di punti e rette e piani, è ovvio che non sono gli stessi gli enti in questione. Ma ciò non vuol dire che s'abbia a che fare con puri «nomi» oggetti in ogni caso d'un discorso formale. Vuol dire invece che ogni discorso in sé considerato racchiude, circoscrive, dei concetti di punti, rette e piani diversi da caso a caso.

E gli oggetti geometrici suscettibili d'essere trattati in piú geometrie, e di essere in esse oggetti «differenti», non costituiscono una pluralità di casi disarticolati e disomogenei, ma, distribuiti in una totalità organica, mostrano l'inesauribilità dei concetti degli enti geometrici.

All'opera di Hilbert qui considerata viene attribuito talora anche un altro significato del quale è opportuno occuparsi brevemente. Hilbert, costruendo modelli aritmetici per illustrare situazioni geometriche – secondo un programma che avrebbe poi trovato il suo maggior sviluppo negli anni tra le due guerre, ma che in quest'opera si può considerare già presente, almeno in una prima fase –, avrebbe portato a compimento l'idea che Descartes aveva solo manifestata nella *Géométrie* senza dare ad essa un compimento organico, la riduzione della geometria all'algebra.

Ora, una parte importante di quest'idea richiede di considerare la *Géométrie* secondo un'ottica particolare: in essa molti aspetti della successiva «geometria analitica» – l'equazione della retta, della circonferenza, le formule per il cambiamento di assi, ecc. – non troverebbero posto per ragioni «contingenti», essendo quest'opera solo un inizio, una prima fase di un programma da elaborarsi successivamente. Certo non molti si sentirebbero di sottoscrivere oggi il paragone di Loria, tra Descartes e Cristoforo Colombo, ma nel complesso la tesi alla quale si è accennato continua ad avere una sua diffusione.

Ma nella *Géométrie* Descartes, commentando la soluzione del problema di Pappo, osserva ben chiaramente che l'equazione $ax+by+c=0$ rappresenta una retta, né gli sfugge quale sia l'equazione di una circonferenza, ché anzi di questa si serve per risolvere, in modo geniale e spesso misconosciuto, il problema delle tangenti.

I piú semplici enti geometrici non sono trattati con equazioni – a giudizio di chi scrive – poiché il discorso cartesiano è volto ad acquisizioni che vanno al di là della geometria elementare. Chi consideri le costruzioni poste all'inizio della *Géométrie*, le stesse costruzioni del libro VI degli *Elementi*, non può non ricavarne l'impressione che il discorso cartesiano accetti come *presupposto* la geometria elementare.

Di fatto poi, storicamente, alla trattazione sistematica degli enti piú elementari della geometria per mezzo della geometria analitica si arrivò sulla spinta di altre motivazioni e partendo dagli enti spaziali. Tale processo viene compiuto con Monge, Lagrange e Lacroix. È Lagrange che in una celebre memoria del 1773 ricava le formule per le facce, gli spigoli, il volume, ecc. di una piramide data nello spazio mediante le coordinate dei suoi vertici. A Lagrange si deve la formulazione del problema: gli enti spaziali, non essendo altrettanto facilmente raggiungibili dalla nostra intuizione degli enti del piano, sono trattati con vantaggio mediante il metodo delle coordinate. In effetti la figura costituita dall'insieme delle rette incidenti a tre rette sghembe, che con il calcolo si mostra facilmente essere un iperboloide rigato, pur essendone la definizione formulata in termini del tutto elementari, non altrettanto elementarmente si offre alla nostra intuizione spaziale. Ecco dunque il vantaggio della trattazione mediante le coordinate.

Ora, quando si considera per esempio nel trattato di Lacroix, come è data l'equazione del piano, come piano assiale, ossia come luogo dei punti equidistanti da due punti fissi $P=(a, b, c)$ e $Q=(\alpha, \beta, \gamma)$, ossia dall'equazione

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

e cioè da una equazione della forma $Ax+By+Cz+D=0$, la struttura stessa del ragionamento costringe a osservare come una consimile equazione in due sole variabili debba rappresentare la retta, ed è un'esigenza di unità e di sistematicità che spinge dunque in primo piano la retta della geometria analitica.

Analogo discorso potrebbe ripetersi per altri enti elementari. Presentati allora in modo analitico gli enti elementari (non si dimentichi poi che il termine 'geometria analitica' è mutuato dalla «meccanica analitica» di Lagrange), si pone in modo quasi ovvio l'idea di vedere se i principali fatti geometrici ad essi relativi sono formulabili in questo modo ed ecco dunque quel programma, che sarà soprattutto di Gergonne, che finirà a configurare la geometria analitica quale oggi viene ancora intesa.

Tra Descartes e Hilbert vi è dunque un lungo e complicato processo, ove possono distinguersi molte articolazioni e molte «decisioni». Ora il giudicare una situazione B, successiva ad A, come termine di un processo è cosa ben diversa dal vedere B come «deducibile» da A, senza ulteriori mediazioni, alla luce di certe caratteristiche molto generali. In quest'ultimo caso è evidente che il modo stesso con il quale si pone il collegamento tra A e B rende assai difficile un atteggiamento critico. Cosí molte idee recenti sui fondamenti della matematica ove viene problematizzata l'aritmetizzazione della geometria – pur riconoscendone ovviamente la necessità datasi storicamente – richiedono come complemento una ricca ed articolata visione storica che crei «gli spazi» per queste idee, mostrandole come possibili approfondimenti piuttosto che come semplici «alternative». La discussione dunque della misura in cui Hilbert porti a compimento un programma cartesiano non è senza rilievo per misurare della rilevanza delle idee fondazionali recentemente proposte da Lawvere e dalla sua scuola, che il lettore troverà piú volte discusse in molti degli articoli di Manin di questa *Enciclopedia*, oltre che in «Funzioni» e in «Trasformazioni naturali / categorie».

All'apparenza ci si è un po' allontanati dal tema proposto all'inizio. Gioverà allora osservare come il senso di quel «procedere cumulativo» di cui si va discorrendo sembri meno evidente quando ci s'immerge nel vivo di idee attuali, di dispute che si dànno nel presente. E tuttavia, siccome non è in discussione il modo di questo procedere, perché è difficile immaginare che proprio nel momento presente vi sia una netta e radicale rottura con il passato – del resto anche in quest'ultimo s'è visto l'«agitarsi delle passioni», ad esempio in Saccheri –, si capisce come ciò giovi a meglio precisare il problema: non è tanto l'accumulo delle conoscenze a imporsi alla nostra attenzione, quanto il fatto che restando esse all'apparenza le stesse, si matura un punto di vista ove i contrasti sembrano di necessità conciliarsi.

A conclusione del suo libro sui fondamenti della matematica, Hatcher, riassumendo le varie posizioni che egli ha esposte, dice che ogni approccio gli sembra in qualche modo fecondo – il che è indubitabilmente vero – e non si debba dunque artificialmente rinunziare ad un approccio anche quando questo sembri in netta contrapposizione con un altro. Una possibile induzione è che si darà infine un punto di vista ove la contrapposizione non avrà piú luogo, e questo è ben credibile, alla luce di quanto storicamente ci ha preceduti.

Ma meno credibile sembra essere il fatto che questo punto di vista possa emergere disponendo degli stessi dati, quasi come per deduzione analitica. Eppure, riflettendo ancora sugli esempi precedenti, si può notare con molta evidenza proprio questa caratteristica: il cambiamento radicale si volge in un accrescimento cumulativo nel riequilibrarsi in modo diverso dei termini del problema.

Si è spesso osservato come molti dei problemi che trovano il loro luogo naturale nella topologia generale (cfr. ◆Geometria e topologia◆), come quello del passaggio al limite e della continuità, sono già presenti nell'antichità, e certo, per esempio, nelle opere di Archimede. Ciò è vero, in un senso molto generale, cosí come è vero che molto si deve per il suo sviluppo ad Eulero e poi a Riemann e Poincaré. Ma molta importanza ha anche una precisa volontà unificante che si manifesta verso la fine dell'Ottocento e nei primi anni del Novecento e che trova una manifestazione quasi paradigmatica in celebri memorie di Fréchet sui «Rendiconti del circolo matematico di Palermo». Se è vero che Fréchet, che pur dà un adeguato concetto di spazio metrico, non darà una formulazione altrettanto felice del concetto di spazio topologico, per il quale provvederà Hausdorff nel 1914, va tuttavia notata l'istanza di fondo: si tratta di considerare in modo uniforme enti per i quali si avverte che esiste come fondamento un unico concetto di vicinanza.

La topologia generale come strumento unificante ha avuto, e ha, un'importanza fondamentale nella matematica di questo secolo. Nel campo della geometria algebrica essa ha segnato progressi decisivi la cui importanza va forse al di là dello specifico della disciplina stessa. Il concetto di topos elaborato da Grothendieck e dai suoi collaboratori nei vari volumi del *Séminaire de géométrie algébrique* (*SGA*), generalizzato in quello di topos elementare, sembra offrire un contesto cosí flessibile per trattare vari ordini di questioni – dalla semantica di Kripke agli schemi affini, dagli insiemi astratti agli insiemi «variabili» – da suggerire anche la possibilità di nuove valenze metodologiche: uno studio del continuo in termini piú diretti ed immediati di quelli che conseguono alla sua aritmetizzazione.

Ma al tempo stesso, e per vie certo non facilmente prevedibili, si ha un «recupero»: la logica intuizionista. Se si considera per esempio un anello A nel topos dei fasci sopra un certo spazio topologico X, il che equivale ad un fascio di anelli su X, in questo anello «variabile» valgono le leggi della logica intuizionista, il che implica per esempio che diverse definizioni di campo, equivalenti classicamente, conducono ad oggetti diversi nella categoria dei fasci su X, oggetti tuttavia non banali. Per esempio, solamente la piú forte tra le definizioni di campo, $\forall a[\exists x(ax=1)\vee(a=0)]$, equivale al fatto che per ogni punto x di X

la spiga A_x sia un campo, mentre altre definizioni di campo equivalenti classicamente a quella data conducono a richieste piú deboli.

Si capisce allora che studiare «in che modo» una struttura è campo, cioè secondo quale formulazione, equivale a studiare in modo non banale una determinata struttura. Per dare un esempio concreto, se per un anello commutativo A il fascio strutturale $\tilde{A}$ nella categoria dei fasci su Spec (A) è un campo secondo la definizione precedente, allora A è un anello regolare (nel senso di Neumann), e viceversa. Studiare allora gli anelli regolari equivale a studiare (con opportune precisazioni sulla traducibilità delle formule) i campi secondo la formulazione precedente, pur di usare in quest'ultimo caso la logica intuizionista.

La logica intuizionista, che appare cosí con motivazioni diversissime da quelle originali di Brouwer e portata innanzi con intenti assai diversi, è, almeno formalmente, «la stessa» logica intuizionista.

Ma mentre all'origine essa pareva opporsi alla matematica classica, limitando le capacità dimostrative e producendo una «mutilazione» della matematica che suscitava non poche perplessità, ora essa appare come un arricchimento, amplia le nostre possibilità di studio piuttosto che diminuirle, estendendole ad oggetti «variabili». Anche in questo caso pare che il senso originario del contrasto venga a perdersi, ma è pur vero che occorre un lungo ed elaborato processo durato piú di settant'anni per giungere a questa acquisizione.

Qui almeno non viene a realizzarsi solo un cambiamento di punto di vista, restando immutati altri dati, il che mostra come la questione vada considerata, in generale, con molta cautela. Ma certo ancora, l'aspetto che piú colpisce la riflessione è come la logica intuizionista, dopo essere stata per lungo tempo «opposta» alla logica classica, finisca con il confluire in una situazione, piú ricca, di coesistenza.

In molte delle questioni considerate, in modo essenzialissimo nel programma di Erlangen, era implicito il concetto d'◆invariante◆. In realtà questo concetto appare in molte situazioni cosí fondamentali che sembra talvolta che la ricerca di invarianti coincida con il discorso matematico stesso. Esso ha perciò condiviso la sorte di molti concetti fondamentali che, mescolati nella pratica quotidiana, stentano a divenire trasparenti alla nostra ragione (si pensi per esempio al concetto di insieme). Non è da stupire cosí che solo con il secolo scorso si sia giunti a formulare in modo preciso che cosa debba intendersi per invariante. Tuttavia da allora molte delle questioni piú fondamentali della matematica e non solo la «teoria degli invarianti» hanno ricevuto una formulazione adeguata ad esso. Cosí in qualche modo esso fornisce, dal nostro punto di vista, uno strumento per una lettura «trasversale» di determinate evoluzioni.

Dopo secoli di tentativi per realizzare una carta geografica che rappresenti adeguatamente la superficie terrestre sul piano, Gauss, con le famose *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828), ricercando quali proprietà di una superficie (cfr. ◆Curve e superfici◆), che s'immagini fatta di un tessuto flessibile ed inestendibile, rimangano inalterate per deformazione, giunge alla «curvatura gaussiana», e risolve negativamente il problema. L'osservazione che la sfera ha

curvatura costante e positiva mentre il piano ha curvatura nulla è di una semplicità disarmante di fronte alla drammaticità con la quale si poteva porre il problema, caratteristica che è condivisa da ogni soluzione che si dia in termini di invariante: il problema è ridotto a un calcolo.

Con queste brevi osservazioni si conclude, riassumendo un poco, quanto è stato detto fin qui: l'impressione d'un'effettiva crescita del sapere al di là dei contrasti, reali o ideologici, sembra confermata dall'esame di alcuni degli argomenti fondamentali degli articoli che qui si considerano. Anzi, essa sembra talvolta «fin troppo» confermata suscitando appunto l'idea d'un edificio che, costruibile armoniosamente pezzo per pezzo, se non è in tal modo edificato, non è, per ragioni contingenti, eliminabile.

Certo, si giunge a questa formulazione attraverso molte semplificazioni, talora drastiche, talora eccessive. Tuttavia, che questo modo di crescere effettivo, ordinato possa agire, almeno come ideale, sembra che non possa negarsi. In questo ideale certo confluiscono molti degli aspetti che dànno alla matematica il suo fascino particolare. [M. G.].

Aleksandrov, P. S.
1947 *Kombinatornaja topologija*, OGIZ, Moskva-Leningrad (trad. it. Einaudi, Torino 1957).

Artin, M.; Grothendieck, A.; e Verdier, J.-L.
[1963-64] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Compte rendu du séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie n. 4, 1963-1964*, I. *Théorie des topos*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1972.

Bourbaki, N.
1960 *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris (trad. it. Feltrinelli, Milano 1963).
1971 *Eléments de mathématique*, VII. *Groupes et algèbre de Lie*, Hermann, Paris.

Dieudonné, J.
1974 *Cours de géométrie algébrique*, voll. I e II, Presses Universitaires de France, Paris.
1977 *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris.

Grothendieck, A., e Dieudonné, J.
1960 *Eléments de géométrie algébrique*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris; ed. Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1971².

Heyting, A.
1956 *Intuitionism. An Introduction*, North-Holland, Amsterdam.

Moser, J.
1973 *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Mumford, D.
1965 *Geometric Invariant Theory*, Academic Press, New York.

Weil, A.
1949 *Number of solutions of equations in finite fields*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», LV, pp. 497-508.

Weyl, H.
1939 *Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton N.J. 1946².

Zariski, O., e Samuel, P.
1958 *Commutative Algebra*, Van Nostrand, Princeton N.J.

Curve e superfici costituiscono gli elementi fondamentali della geometria. È chiaro quindi come una trattazione dell'argomento imponga un confronto con questa scienza.

La geometria nacque come scienza nell'antichità classica, ad opera soprattutto dei Greci. Ad essi risale la considerazione delle prime e piú semplici curve e superfici: le rette ed i piani, le sezioni coniche e le quadriche piú elementari, quelle di rotazione. Curve e superfici piú complesse compaiono come mezzi per la risoluzione di problemi geometrici classici: duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del cerchio. Si vedrà in seguito qualche esempio relativo.

La geometria può essere ripartita, in maniera abbastanza plausibile, in geometria sintetica, geometria algebrica, geometria differenziale; anche la trattazione del nostro argomento sarà quindi considerata sotto questo triplice aspetto, ma si tratterà prevalentemente l'ultimo, perché gli altri due saranno trattati anche in altri articoli.

A titolo orientativo, vale la pena di accennare una definizione dei tre aspetti considerati. Essa in qualche modo può leggersi anche come una rudimentale storia della geometria e permetterà dunque di ripristinare quei collegamenti che una trattazione specifica deve necessariamente recidere.

Ad esempio quando – trattando curve e superfici dal punto di vista algebrico – si considera Newton in rapporto alla sua opera di classificazione delle curve piane del terzo ordine, è chiaro che ci si pone in un'ottica assai limitata in rapporto sia allo stesso Newton sia alla considerazione della scienza nel suo complesso. Tuttavia il lettore può risalire da questa particolare considerazione delle curve e superfici dal punto di vista algebrico, mediante la conoscenza di altri aspetti dell'attività di Newton, con l'aiuto della collocazione storica implicita, alla complessa dialettica della geometria algebrica in rapporto alla matematica ed alla scienza nella sua interezza.

La geometria sintetica può definirsi come quella ove si considerano le figure direttamente, senza strutture algebriche. Essa è quindi necessariamente la geometria dei predecessori di Descartes, dell'epoca precedente alla geometria analitica. Con l'introduzione del metodo delle coordinate la geometria sintetica diverrà una parte autonoma della geometria con metodi e problemi propri. Della geometria sintetica si tratterà solamente un argomento particolare: la geometria proiettiva. Questo per la particolare facilità di cogliere i legami con il contesto culturale nel quale ha origine la geometria proiettiva.

La geometria algebrica consiste nello studiare le proprietà delle figure geometriche attraverso relazioni algebriche fra le loro coordinate o le loro equazioni. Essa ha quindi origine dopo l'introduzione del metodo delle coordinate.

La geometria differenziale ha origine naturalmente dopo la «scoperta» del calcolo differenziale. Si considerano le proprietà delle figure mediante gli strumenti di questo calcolo.

Queste tre geometrie hanno origine in momenti storici differenti. Non bisogna tuttavia pensare ad un rapporto di subordinazione. Non vi è un'evoluzione dalla geometria sintetica a quella differenziale. Con l'introduzione del metodo delle coordinate divengono formulabili certe proprietà delle curve e superfici descrivibili in modo algebrico: il grado, la classe, ecc. È possibile introdurre il concetto di punto singolare ed indagarne la natura. Tutto questo certo è nuovo, ed è impensabile senza l'introduzione del metodo delle coordinate. Ma non è men vero che successivamente si sono scoperte importanti proprietà geometriche – proprietà proiettive – tipiche dell'ambito della geometria sintetica.

Un'opera classica di geometria proiettiva, la *Geometria di posizione* di Staudt [1847], compare a metà Ottocento, ossia circa due secoli dopo Descartes.

Ancora, non è men vero che con l'introduzione del calcolo differenziale la geometria algebrica subirà una battuta d'arresto, cedendo il passo al prorompere impetuoso dei risultati della geometria differenziale; ma verso la fine del secolo scorso, con l'introduzione sistematica del metodo del cambiamento di riferimento e con la teoria degli invarianti, la geometria algebrica riacquisterà un interesse di prim'ordine, ed avrà una parte fondamentale nella nascita dell'algebra astratta.

Guardando poi la situazione attuale, si osserva come la geometria differenziale sia profondamente connessa alla teoria della relatività, e ne è quindi chiara l'importanza. D'altro canto la geometria algebrica è attualmente uno dei campi di ricerca piú attivi e ricchi di risultati.

All'interno della geometria sintetica, la geometria proiettiva che pareva in una certa forma giunta alla sua completa evoluzione, si rivela di grandissima utilità per gli aspetti della matematica finitistica di recente creazione.

Si può parlare dunque di tre aspetti, dei quali ha senso naturalmente indagare volta per volta quale sia quello fondamentale, ma senza pretendere che la questione acquisti un assetto definitivo.

1. *Curve e superfici dal punto di vista proiettivo.*

La geometria proiettiva ha origine nel Seicento, come elaborazione teorica dei problemi connessi con la prospettiva lineare, e quindi in stretto legame con la pittura, l'architettura e le arti visive in genere. Per illustrare la natura dei suoi metodi e dei suoi scopi può giovare un semplice esempio (fig. 1). Si consideri un osservatore O che guarda una figura F che per semplicità supponiamo tracciata su un piano π, attraverso una lastra di vetro π' interposta, e s'immagini che da ogni punto di F parta un raggio luminoso che raggiunga l'osservatore O. La figura F darà luogo ad una figura F' sulla lastra di vetro π'.

La figura F' – accettando tutte le drastiche semplificazioni implicite: visione monoculare, non-deformazione delle linee rette, ecc. – è quella che un pittore deve dipingere se s'immagina che π' sia la tela ed F la figura da riprodursi.

Naturalmente la pratica della pittura non consente di operare nel modo descritto e si pone dunque il problema di esaminare come si trasformano le proprietà di F, e quali eventualmente si conservano, nel passaggio ad F'. Utilizzando il lin-

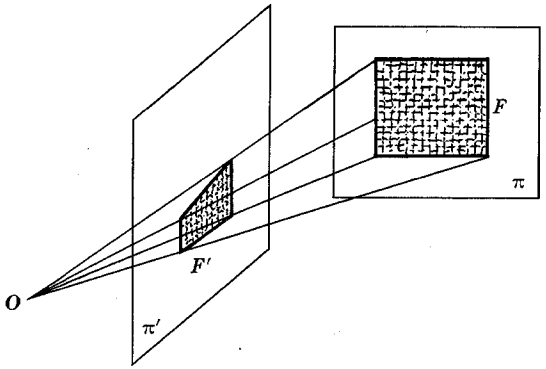


Figura 1.

Un osservatore, posto in O, vede la figura F del piano π, su una lastra di vetro interposta π', secondo la figura F'.

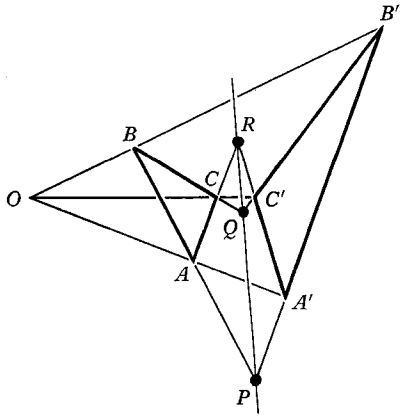


Figura 2.

I lati AB, $A'B'$, BC, $B'C'$, AC, $A'C'$, prolungati, determinano tre punti allineati P, Q, R.

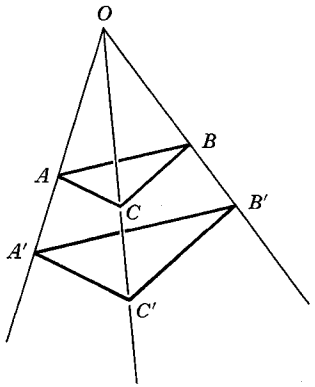


Figura 3.

Con una proiezione su π' la retta PQ viene mandata all'«infinito». Si tratta ora di dimostrare che i lati AB, $A'B'$, BC, $B'C'$, e AC, $A'C'$ sono paralleli.

guaggio della geometria proiettiva si dirà proiezione la figura che si ottiene congiungendo i punti di F con O. Si chiamerà poi sezione la figura che si ottiene intersecando questa figura con il piano π'; ossia F' è la sezione della proiezione di F da O.

Oggetto della geometria proiettiva può definirsi ora l'indagine sistematica delle proprietà che rimangono invariate per proiezione e sezione. Una di tali proprietà, d'importanza fondamentale, che può illustrare assai bene la natura delle proprietà proiettive, è espressa dal teorema di Desargues, il quale fu uno dei fondatori di questa scienza.

Si supponga che un osservatore O consideri un triangolo ABC. Congiungendo A, B e C con O si ottiene una proiezione del triangolo. Se ora si considera una sezione di questa proiezione, si ottiene un nuovo triangolo $A'B'C'$. Il teorema di Desargues afferma ora che le rette AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$ s'incontrano in tre punti P, Q, R che giacciono su una stessa retta.

Si accenna la dimostrazione, nel caso particolarmente semplice nel quale i due triangoli sono nello stesso piano. Questa dimostrazione, pur essendo molto facile, contiene nella sua essenza quello che è il «metodo» della geometria proiettiva. A conclusione di essa si cercherà quindi di porre in evidenza quali siano gli aspetti concettuali piú rilevanti.

Si consideri la figura 2. Si tratta di dimostrare che P, Q ed R appartengono ad una medesima retta, cioè, per esempio, che R appartiene alla retta di P e di Q. La dimostrazione consiste ora nell'alterare la figura – conservando invariata la proprietà che si vuole dimostrare – riducendosi ad una figura piú favorevole, per la quale la proprietà risulti evidente. Se si considera la proiezione della figura in esame da un punto S esterno al piano e successivamente una sezione con un piano π', ossia una proiezione su π', la proprietà da dimostrare è vera nel piano dato se e solo se essa è vera nel piano π'. Ma si può scegliere π' in maniera opportuna, cioè parallelo al piano che contiene la retta PQ ed il punto S. In tal modo P e Q vengono «mandati all'infinito», ossia le rette che originariamente si intersecavano in questi punti divengono parallele. Non solo: le rette parallele del piano π' sono tutte e solo le rette che provengono, per proiezione dal piano originario, da rette che prima si intersecavano sulla retta PQ. Cosí si tratta ora di dimostrare che, essendo divenute parallele le rette AB e $A'B'$, e AC e $A'C'$ (conservando gli stessi nomi per i punti immagine su π'), anche le rette BC e $B'C'$ sono divenute parallele.

La dimostrazione è dunque ricondotta a: Dati i due triangoli ABC e $A'B'C'$ tali che le rette AA', BB', CC' sono concorrenti in O, se AB è parallela ad $A'B'$, AC è parallela ad $A'C'$, allora anche BC è parallela a $B'C'$. Si consideri dunque la figura 3. La retta AB per ipotesi è parallela ad $A'B'$ e la retta AC ad $A'C'$. Allora dal teorema di Talete, si ha

$$OA : OA' = OB : OB'$$
$$OA : OA' = OC : OC'$$

e dunque

$$OB : OB' = OC : OC'.$$

Applicando ora il teorema inverso di quello di Talete, si ha che le rette BC e $B'C'$ sono parallele.

È molto facile cogliere l'essenza della dimostrazione data. Si deforma una figura badando al fatto che la deformazione non alteri certe proprietà. Si ottiene una nuova figura piú semplice per la quale la dimostrazione da compiersi risulta molto facilitata. Questo metodo, presente in forma embrionale in Desargues, perfezionato poi da Pascal, giungerà a completa chiarezza metodologica con Poncelet e la sua scuola, cioè durante i primi anni dell'Ottocento. Raggiungerà infine la forma classica con Steiner e soprattutto con Staudt.

Poiché la deformazione da scegliersi per ridursi al caso piú favorevole dipende dalla figura originaria, si capisce come, pur essendo date delle indicazioni metodologiche, sia pur sempre una questione di immaginazione, di intuito, di esperienza, cogliere quale sia la giusta trasformazione. Si capisce cosí come s'incontrino nella geometria proiettiva metodi, artifici, ingegnosità che la rendono simile ad un'arte. Al tempo stesso si capisce come essa possa degenerare spesso, soprattutto a livello di insegnamento, in fantasie mistico-irrazionalistiche.

Un altro esempio particolarmente affascinante è dato dalla generazione proiettiva delle coniche (Steiner). Si assuma – senza dimostrarlo – il risultato che ogni conica, ossia ogni curva sezione di un cono con un piano, possa essere ottenuta mediante successive proiezioni e sezioni a partire da un cerchio. Si consideri la seguente proprietà del cerchio: se da due punti estremi di un diametro A, B si proietta un punto P, variabile sulla circonferenza, le rette AP e BP risultano perpendicolari (fig. 4); e inversamente, se dal punto estremo A di un segmento AB si conduce una retta r e da B una retta r' perpendicolare ad r, le due rette s'intersecano in un punto P del cerchio avente per diametro AB. Se si traduce algebricamente la relazione che intercede tra le rette uscenti da A e da B, si ottiene la relazione $mm'+1=0$, ossia l'equazione di una particolare proiettività tra le coordinate m ed m'. In effetti questa equazione appartiene al tipo piú generale $amm'+bm+cm'+d=0$. Ma in quale senso un'equazione è piú generale dell'altra (oltre naturalmente al fatto ovvio che la prima può ottenersi dalla seconda per una particolare scelta dei coefficienti)?

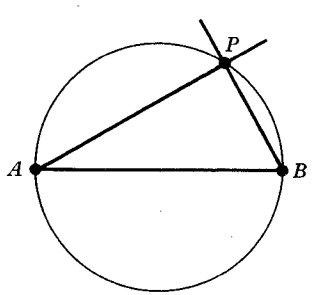


Figura 4.

Le rette AP e BP, che proiettano un punto variabile P dagli estremi di un diametro, sono perpendicolari.

Se si considerano una conica K arbitraria e due punti A^* e B^* su di essa, i coefficienti m ed m' delle rette che proiettano un punto variabile P sulla conica sono legati appunto dalla relazione $amm'+bm+cm'+d=0$. Questo fatto si spiega osservando che mediante trasformazioni proiettive, ossia proiezioni e sezioni, è possibile trasformare il cerchio nella conica K in modo che i punti A e B del cerchio divengano i rispettivi punti A^*, B^* di K. In tale trasformazione la prima relazione si trasforma nella seconda. Viceversa, ogni tale trasformazione è subordinata da una trasformazione della conica nel cerchio.

Poiché il cerchio è generato dai punti P che verificano $mm'+1=0$, si ha analogamente il teorema sulla generazione proiettiva delle coniche.

TEOREMA. *Una conica K può essere descritta considerando due arbitrari punti A^* e B^* ed assegnando tra le coordinate delle rette che escono da A^* e da B^* un legame del tipo*

$$amm'+bm+cm'+d=0.$$

I punti della conica sono ottenuti considerando l'intersezione delle rette omologhe. Ossia, fissato un certo valore m si risolve l'equazione in m' che ne consegue e si intersecano le rette cosí ottenute.

Un aspetto concettuale molto importante della geometria proiettiva, che si enuncia per il caso della geometria piana per semplicità, ma che è molto facile trasferire alla geometria spaziale od iperspaziale, è fornito dalla legge di dualità. Essa si fonda sull'osservazione che se si effettua nel linguaggio della geometria proiettiva piana (opportunamente formalizzato) la sostituzione punto $\rightleftarrows$ retta un enunciato «vero» viene mutato in un altro enunciato «vero». Ad esempio da *Due rette distinte determinano uno ed un sol punto*, si ottiene *Due punti distinti determinano una ed una sola retta*; naturalmente si fa riferimento al piano proiettivo, ossia al piano ordinario «completato» in modo che due rette abbiano sempre un punto d'intersezione. Questa osservazione trova il suo fondamento nel fatto che è possibile dare agli assiomi della geometria proiettiva una forma autoduale; ossia eseguendo su un assioma la sostituzione di 'punto' e 'retta' (e adeguando opportunamente il linguaggio) si ottiene un altro assioma. È chiaro allora che da ogni teorema si ottiene un teorema «duale» sostituendo ovunque nella dimostrazione i termini 'retta' e 'punto'.

La legge di dualità è dunque ora un teorema della geometria proiettiva o, se si vuole essere piú precisi, un metateorema. Infatti essa non è dedotta a partire dagli assiomi della geometria proiettiva, come dovrebbe essere per un teorema, ma è oggetto di una riflessione *sugli* assiomi, sulla loro forma. Questo forse spiega perché la sua scoperta sia avvenuta in tempi relativamente recenti. Infatti essa fu formulata per la prima volta da Gergonne, verso la fine del Settecento, ripresa da Poncelet e dalla sua scuola all'inizio dell'Ottocento e giunse infine a completa chiarezza solo con Steiner e soprattutto con Staudt.

Un esempio piuttosto suggestivo di applicazione di questa legge è fornito dal passaggio dal teorema di Pascal al teorema di Brianchon. Ecco il primo enunciato:

TEOREMA (Pascal). *Se A, B, C, D, E, F sono i punti di un esagono inscritto in una conica, le rette opposte AB ed ED, BC ed EF, AF e CD s'intersecano in tre punti P, Q, R che sono allineati.*

Se si dispongono i punti dati secondo la figura

A B
F C
E D

risulta immediatamente chiaro cosa debba intendersi per rette opposte. La dimostrazione si riconduce al caso nel quale *A, B, C, D, E, F* siano i vertici di un esagono regolare inscritto in un cerchio (fig. 5): allora la proprietà si riduce al fatto che *AB* ed *ED*, *BC* ed *EF*, *CD* ed *AF* sono paralleli, ossia s'intersecano sulla «retta impropria».

Un'applicazione molto importante di questo teorema è fornita dal fatto che esso permette, assegnati cinque punti *A, B, C, D, E*, di determinare altri punti arbitrari della conica. Se si pensa che una conica è il percorso di un pianeta intorno al Sole, secondo la legge di Keplero, ciò significa che da cinque osservazioni astronomiche è possibile descrivere la traiettoria del pianeta. È dunque un teorema di grande importanza pratica. Cosa si può dedurre da esso applicando la legge di dualità?

TEOREMA (Brianchon). *Se a, b, c, d, e, f sono le rette di un esagono circoscritto ad una conica, i «punti opposti» ab e ed (con ab si deve intendere il punto d'intersezione di a e di b, ecc.), bc ed ef, af e cd stanno su tre rette p, q, r, che passano per un medesimo punto.*

Ciò che si è osservato sull'importanza del teorema di Pascal per la descrizione di una conica come luogo di punti, si può ora ripetere per il teorema di Brianchon e per la descrizione di una conica come inviluppo delle sue tangenti.

Dal principio di dualità segue ora che non si deve dare nessuna dimostrazione del teorema di Brianchon. Esso è «vero» per la forma del suo enunciato, perché

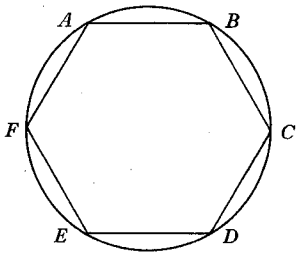


Figura 5.

La figura serve per dimostrare il teorema di Pascal in un caso semplice. La dimostrazione generale si riconduce al caso particolare.

è ottenuto da quello di Pascal semplicemente sostituendo le parole 'retta' e 'punto'.

Nell'enunciare il principio di dualità si è fatto riferimento, di sfuggita, alla possibilità di trattare la geometria proiettiva come una scienza formulabile in forma ipotetico-deduttiva, con assiomi posti a fondamento, ecc. Ad una tale formulazione si è giunti solamente in tempi relativamente recenti, con la presa di coscienza dell'importanza, per le discipline matematiche, della forma assiomatica.

L'opportunità di trattare in forma assiomatica la geometria proiettiva in particolare, e non di essa all'interno della geometria euclidea o di una geometria piú vasta, scende dalla omogeneità dei suoi teoremi e dei suoi metodi che la configurano assai bene come un oggetto unitario, come del resto era stato riconosciuto da Staudt, piú di un secolo fa.

E allo stesso Staudt risale l'avvertenza che questa trattazione separata viene perseguita per motivi di chiarezza concettuale, di analisi di particolari proprietà e non certo alla esigenza di opporre una «geometria proiettiva» come scienza geometrica particolare ad altre geometrie. «Trattare tutta la geometria di posizione da sé, senza introdurre concetti metrici che le sarebbero estranei, costituí un grande progresso, poiché se è vero che le varie scienze debbono prestarsi scambievoli ajuti e che molte grandi scoperte sono derivate appunto dal collegare fra loro dottrine apparentemente molto disparate, non è meno vero che risultati altrettanto importanti si son visti ad esempio nell'analisi, nella geometria, nella meccanica quando in ciascuna di esse si è cercato di ridurre i postulati, i metodi e gli strumenti di ricerca al minor numero possibile. Da questa purezza di metodo si rese visibile che, come osservò F. Klein, la geometria projettiva vale indipendentemente dal postulato sulle parallele. Solo da essa fu messa in piena luce la legge di dualità tra le proprietà descrittive delle figure e provato come questa legge si possa utilizzare in tutta la sua pienezza fin dai principii» [Segre 1889, pp. XI-XII].

E qui appare chiaramente l'opportunità della trattazione della geometria proiettiva in sé. Ma che ciò non dovesse dar luogo ad una scienza separata è confermato dalla progettazione di una successiva opera di Staudt sulla geometria metrica, la quale non ebbe luogo solo a causa della sua morte.

Si esamina ora un'impostazione assiomatica della geometria proiettiva.

Per limitarsi al caso semplice della geometria proiettiva piana si possono dare i seguenti assiomi:

1) Per due punti passa una ed una sola retta.
2) Due rette si intersecano in uno ed un solo punto.
3) Esistono quattro punti tali che tre qualsiasi tra di essi non sono allineati.

Questi assiomi permettono di svolgere in maniera semplice e rigorosa la maggior parte delle considerazioni che abbiamo fatte in precedenza. Essi meritano tuttavia un ulteriore commento. È chiaro, dalla loro forma, che essi prevedono esplicitamente anche la presenza di piani proiettivi *finiti*, pur prescrivendo, mediante 3), opportune limitazioni. Che senso ha la struttura di piano proiettivo finito?

Non è qui il caso di porre una discussione generale sulla questione, occorre tuttavia qualche considerazione.

I) La presenza di modelli finiti (ad esempio quello dato dai sette punti A, B, C, D, E, F, G e dalle sette rette AFB, BDC, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF) risolve automaticamente le questioni di consistenza. Gli assiomi 1), 2), 3) sono certo consistenti, ed il modello dato lo dimostra.

II) La distanza tra il modello previsto da 1), 2), 3) ed il piano proiettivo classico può essere colmata progressivamente, aggiungendo gradualmente assiomi. Ciò fornisce un'analisi efficace della struttura dello spazio proiettivo classico.

III) L'esistenza di modelli proiettivi finiti permette di geometrizzare certe situazioni «concrete». Una quantità finita di elementi può immaginarsi appartenere ad un piano proiettivo di ordine opportuno e dunque essere trattata in modo geometrico.

Queste semplici considerazioni già mostrano come la geometria proiettiva finita, ed in generale la geometria finita, siano dotate di grande importanza e significatività. Ecco dunque alcuni risultati. Si ha intanto:

DEFINIZIONE. *Un piano proiettivo è detto di ordine n se una delle sue rette contiene $n+1$ punti.*

Si deduce allora agevolmente che ogni retta contiene lo stesso numero di punti e, per dualità, che ogni punto appartiene ad $n+1$ rette. Dunque un piano proiettivo di ordine n contiene n^2+n+1 punti e lo stesso numero di rette. La «rigidità» di questa situazione mostra come l'esistenza di un piano proiettivo di un dato ordine non sia un problema facile. In effetti già per $n=10$ non si sa se esista o meno un piano proiettivo di quest'ordine.

Tuttavia l'esistenza di un corpo finito di n elementi per $n=p^\alpha$ dà:

TEOREMA. *Se $n=p^\alpha$, con p primo, esiste un piano proiettivo di ordine n.*

Si concludono queste considerazioni sulla geometria proiettiva osservando come gli assiomi 1), 2), 3), per quanto semplici ed eleganti, tuttavia non sono in forma comoda per dedurre il principio di dualità. Infatti in essi punti e rette compaiono in maniera dissimmetrica. Ciò può essere evitato, a scapito della forma intuitiva, considerando un'unica relazione «su», che riassuma al tempo stesso i concetti «un punto appartiene ad una retta», «una retta contiene un punto». Gli assiomi assumono la forma seguente [cfr. Menger 1948]:

1) Vi è una ed una sola retta su due punti distinti, ed uno ed un solo punto su due rette distinte.
2) Esistono due punti e due rette tali che ognuno dei punti è su una sola delle due rette ed ognuna delle rette è su uno solo dei punti.
3) Esistono due punti e due rette, i punti non essendo sulle rette, tali che il punto sulle due rette è sulla retta sui due punti.

Il principio di dualità è ora evidentemente deducibile dalla forma autoduale degli assiomi.

2. *Curve e superfici dal punto di vista algebrico.*

Si tratterà questo argomento molto in breve, perché molte delle questioni di maggiore interesse sono contenute in altri articoli di questa *Enciclopedia*.

Si è già osservato come curve e superfici, con l'introduzione del metodo delle coordinate, possano essere definite mediante equazioni o sistemi di equazioni. Quando queste equazioni sono rappresentate da polinomi uguagliati a zero, curve e superfici divengono oggetti di studio della geometria algebrica.

Naturalmente l'algebricità costituisce un vincolo assai notevole, rimane tuttavia oggetto di studio una classe di curve, superfici, in generale di varietà, assai vasta.

Si tratterà principalmente delle curve algebriche piane, poiché è il soggetto che piú si presta ad esporre i concetti essenziali. Una curva algebrica è dunque il luogo dei punti del piano che hanno coordinate x, y che soddisfano ad un'equazione del tipo $f(x, y)=0$, ove $f(x, y)$ è un polinomio a coefficienti reali. Ad esempio una circonferenza è rappresentata da $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Una retta da $ax+by+c=0$, ove, per ottenere le equazioni, si tiene conto delle particolarità geometriche delle curve che si vogliono rappresentare.

Si pongono in maniera naturale un certo numero di definizioni. L'ordine di una curva algebrica è dato dal grado del polinomio che la rappresenta. Esso ha un evidente significato geometrico; se si considera l'intersezione della curva $f(x, y)=0$ con una retta $ax+by+c=0$, si è condotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

ove, eliminando ad esempio la y fra le due equazioni, si ottiene un'equazione risultante in x, di grado n (in generale). Un polinomio a coefficienti reali di grado n, uguagliato a zero, ha al piú n radici, opportunamente contate. Da ciò si ha che «l'ordine di una curva algebrica rappresenta il numero massimo d'intersezioni che questa può avere con una retta».

Con un ragionamento sostanzialmente analogo, per quanto assai piú complicato, si conclude che due curve algebriche di ordine rispettivamente n ed m hanno al piú nm punti in comune.

Questi risultati, per quanto naturali e rigorosi, sono tuttavia assai insoddisfacenti dal punto di vista teorico. Assai meglio sarebbe poter garantire che una curva e una retta hanno esattamente n punti in comune, che due curve di ordine n ed m s'intersecano in esattamente nm punti.

Questi problemi di aspetto cosí «innocente» sono in realtà di fondamentale importanza per la teoria delle curve ed in generale delle varietà algebriche e dunque si cercherà di analizzarli e di mostrare come una loro soluzione, almeno in casi particolari, illumini fatti altrimenti inesplicabili.

Per quale motivo può succedere che una curva e una retta abbiano meno di n intersezioni? Piú in generale, per quale motivo due curve di ordine n ed m possono avere meno di mn intersezioni?

Si consideri l'esempio della circonferenza $x^2+y^2=1$ e della retta $y=2$. La ricerca delle intersezioni conduce all'equazione $x^2+3=0$, la quale è priva di radici, nel campo reale. Una prima difficoltà sorge dunque dal fatto che limitandosi al campo reale questo non è algebricamente chiuso. Una soluzione del problema non può darsi se non ampliando il campo dei coefficienti ad un campo algebricamente chiuso, ad esempio il campo complesso. Sebbene per molte ragioni il campo complesso sia perfettamente adeguato, tuttavia si vedrà tra poco come sia inopportuno fissare una volta per tutte il campo complesso ma sia utile pensare ad un campo algebricamente chiuso o addirittura ad un campo variabile.

Sorvolando per un attimo su tali questioni, s'immagini di operare in un campo algebricamente chiuso K, la curva sarà perciò data dal luogo degli zeri di un polinomio $f(x, y)$ con coefficienti in K.

Si può ora dire che il problema è risolto? Si consideri l'esempio della curva $x^2-y^2-1=0$ e della retta $x+y=1$. L'eliminazione della variabile y conduce all'equazione $x-1=0$, che, essendo di primo grado, fornisce una sola radice. Si ha dunque un solo punto d'intersezione. Questa volta la responsabilità non va attribuita al campo dei coefficienti, ma al fatto che la rimanente radice è «andata all'infinito». La retta che abbiamo considerato è parallela all'asintoto dell'iperbole $x^2-y^2=1$. Questa volta, per ripristinare una situazione soddisfacente, occorre aggiungere i punti all'infinito. Ciò può essere fatto sostituendo alla rappresentazione dei punti mediante una coppia di numeri (x, y) una rappresentazione mediante una terna (X, Y, Z) ponendo l'uguaglianza $X/Z=x$, e $Y/Z=y$, e convenendo che due terne (X, Y, Z) e (X', Y', Z') rappresentino lo stesso punto se esiste un fattore ρ tale che $X'=\rho X$, $Y'=\rho Y$ e $Z'=\rho Z$. Questa rappresentazione appare ridondante per i punti del piano, ma dà luogo ad altri enti: le terne del tipo (X, Y, O) che non sono riducibili ai punti ordinari. Queste terne rappresentano i punti all'infinito. Si veda un esempio concreto. L'equazione dell'iperbole diviene con le nuove coordinate $X^2-Y^2-Z^2=0$ e quella della retta $X+Y-Z=0$. Intersecando si ottiene $Z(X-Y)-Z^2=0$ ed oltre alla soluzione precedente si ha $Z=0$, $X=-Y$. In altre parole le due curve hanno l'ulteriore intersezione data da $(a, -a, 0)$.

Per dare una soddisfacente soluzione al problema occorre dunque immaginare di operare con un campo algebricamente chiuso e di considerare invece del «piano» dato dalle coppie di elementi (k_1, k_2) del campo il piano proiettivo delle terne (K_1, K_2, K_3).

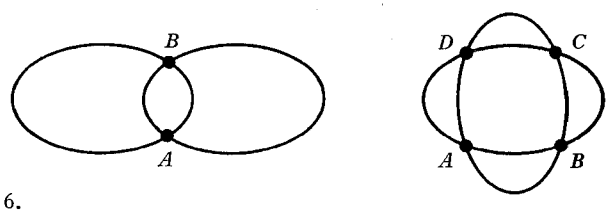


Figura 6.
Possibili intersezioni di due ellissi sul piano reale.

Si veda come questo punto di vista permetta di svelare la natura di fenomeni altrimenti inesplicabili.

Si considerino due ellissi; esse, come curve del secondo ordine, possono avere al piú quattro intersezioni nel piano reale, come suggerisce la figura 6. Se si considerano invece due circonferenze (cioè ellissi particolari), queste non possono avere piú di due intersezioni reali. Infatti se si considerano le equazioni di due circonferenze

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

il sistema che fornisce le intersezioni è equivalente a

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0 \end{cases}$$

il quale può avere al piú due soluzioni. Come è possibile spiegare questo fatto?

L'equazione di una circonferenza scritta mediante le coordinate X, Y, Z è $X^2+Y^2+aXZ+bYZ+cZ^2=0$ e, ponendo $Z=0$, si ottiene $X^2+Y^2=0$. Ponendosi ora dal punto di vista complesso, si ottengono i due punti $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$. Questi punti, che vengono detti punti ciclici, spiegano il comportamento delle circonferenze. Dunque, per spiegare un fenomeno semplicissimo, si è avuto bisogno d'introdurre tanto il piano proiettivo che le coordinate complesse.

Il terzo tipo di difficoltà è rappresentato dal fatto che una curva algebrica può avere punti singolari. Si consideri ad esempio la curva di equazione $y^2=x^3$ e la retta $ax+by=0$. Eliminando la y, si ha $(a/b)^2x^2=x^3$, ossia $x^2=0$ e $x=(a/b)^2$. In altre parole ogni retta – contando la molteplicità due come due intersezioni – interseca la curva in due punti coincidenti in $(0, 0)$. La curva data ha in $(0, 0)$ un punto singolare. Per risolvere il problema dell'intersezione delle curve algebriche occorre sapere quante intersezioni vanno contate in presenza di punti singolari, in particolare quando si sovrappongono due punti singolari.

Si è dunque enucleato un nuovo problema, quello dell'analisi delle singolarità. Subordinatamente a questo problema si può porre quello di quante e quali singolarità possa avere una data curva in rapporto all'ordine o ad altre caratteristiche.

L'analisi delle singolarità è un problema assai delicato, e risolto in maniera soddisfacente per le varietà qualsiasi solo recentemente (Hironaka). Invece della teoria, che necessariamente potrebbe essere presentata solo in modo rudimentale, si espone con un esempio l'idea fondamentale di scioglimento delle singolarità. Quest'idea consiste nel sottoporre la curva da esaminare ad una trasformazione nota la quale fa «esplodere la singolarità». Esaminando il risultato finale, si conclude sulla natura della singolarità. Siano le due curve

$$y^3+(x^2-y^2)=0$$
$$y^3+x^2=0.$$

Esse hanno entrambe un punto singolare per $x=0$, $y=0$. Si consideri la trasformazione di coordinate $X=1/x$, $Y=1/y$. L'effetto di questa trasformazione di coordinate è di spostare all'infinito i punti che sono vicini all'origine; di conseguenza l'effetto della trasformazione va esaminato per le curve trasformate sulla «retta all'infinito». Si osserva che la prima curva viene trasformata in $x^2+y^3-x^2y=0$, mentre la seconda viene mutata in sé. Se ora si esaminano le intersezioni con la retta impropria eccettuando $(0, 1, 0)$ che è un punto singolare per la trasformazione, si ottengono nel primo caso due punti distinti, nel secondo si ritrova $(0, 1, 0)$ contato due volte. Il primo punto singolare viene trasformato in due punti distinti, il secondo in due punti coincidenti; si hanno dunque due singolarità di comportamento diverso. Il primo punto viene denominato punto doppio ordinario, il secondo punto cuspidale.

È stato accennato come non si dia una geometria algebrica soddisfacente quando si considerano curve e superfici, piú in generale varietà, rappresentate da polinomi a coefficienti reali. Tuttavia, anche se è piuttosto naturale considerare le varietà a coefficienti complessi, l'atteggiamento piú «naturale» è quello di considerare invece un corpo base variabile. Naturalmente questo atteggiamento non s'è imposto immediatamente. La prima estensione è stata quella al campo complesso. Successivamente però, a partire dal 1940, si è imposta l'idea di fare una geometria qualsiasi, su un corpo di base arbitrario, ma fissato (Weil, Chevalley, Zariski). Con Grothendieck e la sua scuola giunge a completa chiarezza l'idea di considerare il corpo di base come variabile, o addirittura di pensare ad un anello variabile, per tener conto di altre realtà geometriche.

Mediante questo atteggiamento, perseguito sistematicamente da Grothendieck, è possibile, seppure in maniera assai sofisticata, introdurre nella geometria algebrica il concetto di «punto infinitamente vicino» che si rivela di tanta utilità in altri settori della matematica, per esempio nella geometria differenziale.

3. *Superfici di Riemann.*

In questo capitolo viene illustrato brevemente il concetto di superficie di Riemann. A tal fine va analizzato il concetto di funzione di variabile complessa.

Sia $w=f(z)$ una funzione di variabile complessa: ciò significa che ad un dato valore della variabile z corrisponde uno ed un solo valore w, il quale è completamente determinato da z. Nella pratica matematica s'incontrano dei «legami», coinvolgenti due variabili w e z, i quali, pur senza avere questo carattere funzionale, tuttavia sembrano risolvibili in una o piú specificazioni di questo concetto. Se ad esempio si considera la relazione (tra w e z) $w^2-z=0$, essa pare, a prima vista, equivalente a $w=\sqrt{z}$, $w=-\sqrt{z}$, cioè a due funzioni. Se si esamina piú attentamente la cosa, tuttavia, ciò appare contraddittorio.

Sia $z_0=\rho_0\cos\vartheta_0+i\sin\vartheta_0$. Si ha allora $\sqrt{z_0}=\sqrt{\rho_0}[\cos(\vartheta_0/2)+i\sin(\vartheta_0/2)]$, $-\sqrt{z_0}=\sqrt{\rho_0}\{\cos[(\vartheta_0/2)+\pi]+i\sin[(\vartheta_0/2)+\pi]\}$ e dunque (supponendo $\rho_0\neq 0$) due valori distinti che si possono immaginare appartenenti a due diverse funzioni. Si supponga tuttavia che la variabile z descriva una curva chiusa come nella

figura 7. Poiché si ha un incremento dell'angolo di 2π, si ha per la prima determinazione

$$\sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\vartheta_0+2\pi}{2}\right)+i\sin\frac{\vartheta_0+2\pi}{2}\right]=\sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}+\pi\right)\right]$$

e per la seconda

$$\sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\vartheta_0+2\pi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\vartheta_0+2\pi}{2}+\pi\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}+2\pi\right)\right]=\sqrt{\rho_0}\left(\cos\frac{\vartheta_0}{2}+i\sin\frac{\vartheta_0}{2}\right).$$

E dunque, tornando la variabile z esattamente nel punto iniziale, le due determinazioni si sono scambiate! Ciò mostra che non è possibile concepire due funzioni distinte.

Poiché lo «scambio» avviene consentendo un incremento dell'angolo di 2π, si potrebbe risolvere il problema limitando la variabilità della z. Se ad esempio s'immagina di togliere dal piano complesso l'asse positivo delle ascisse, si ottengono due funzioni perfettamente definite. Ma certo questo non può apparire soddisfacente. Risolvere la contraddizione impedendosi di calcolare la radice di un numero reale positivo non può essere giudicato un modo naturale di procedere.

La soluzione della contraddizione è data invece dalla superficie di Riemann. S'immaginino due piani sovrapposti ove possa scorrere la variabile complessa. Con $(z, 1)$ sia indicato il punto sul primo piano e con $(z, 2)$ il punto sul secondo piano, come nella figura 8*a*. Si è già osservato come non sia possibile definire $\sqrt{z}$ sul primo piano e $-\sqrt{z}$ sul secondo, poiché ad un certo punto le due determinazioni si scambiavano. L'idea ora è semplicemente quella di «raccordare» i due piani in maniera da rendere possibile questo scambio. Ciò, in termini intuitivi, può essere effettuato nel modo seguente: si effettua un taglio sul primo piano, in corrispondenza all'asse delle ascisse, secondo una piccola apertura rettilinea data dalle rette a_1b_1 e c_1d_1 che si immaginano «infinitamente vicine» (fig.

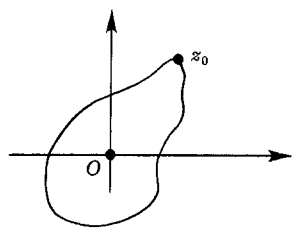


Figura 7.

Quando la variabile z descrive la curva in figura, le due determinazioni di $\sqrt{z}$ si scambiano.

8*b*). Corrispondentemente, nel secondo piano, si tracciano le rette a_2b_2 e c_2d_2 (fig. 8*c*). Si raccordano poi i fogli sovrapposti (che per semplicità sono rappresentati distinti) secondo la figura 8*d*, ossia a_1b_1 con c_2d_2 e c_1d_1 con a_2b_2. Si badi che tutto questo non è che un'immagine visiva e l'autoattraversamento che compare nella figura è legato a questa immagine, ma non ha nessuna «realtà». I fogli sono sovrapposti e le distanze tra le rette sono «infinitesime»! Tuttavia questo espediente grafico dovrebbe avere reso chiaro il concetto di superficie di Riemann e conseguentemente, ora, la definizione della radice quadrata su questa superficie dev'essere chiara:

$$\sqrt{(z, 1)} = \rho\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\sqrt{(z, 2)} = \rho\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{2}+\pi\right)\right].$$

È poi invalso l'uso di denotare $(z, 1)$ e $(z, 2)$ semplicemente con z. Quando ora la variabile z arriva alla retta c_1d_1, descrivendo un giro intorno all'origine, come in precedenza, «scivola» nel piano sottostante.

Per tornare nello stesso punto occorrono ora due giri, il che risolve la contraddizione. Si è cosí definita la radice quadrata ma non come funzione di **C** in **C**; è una funzione della superficie di Riemann, sia essa $\mathcal{R}$ in **C**, ossia $\sqrt{z} : \mathcal{R} \to \mathbf{C}$.

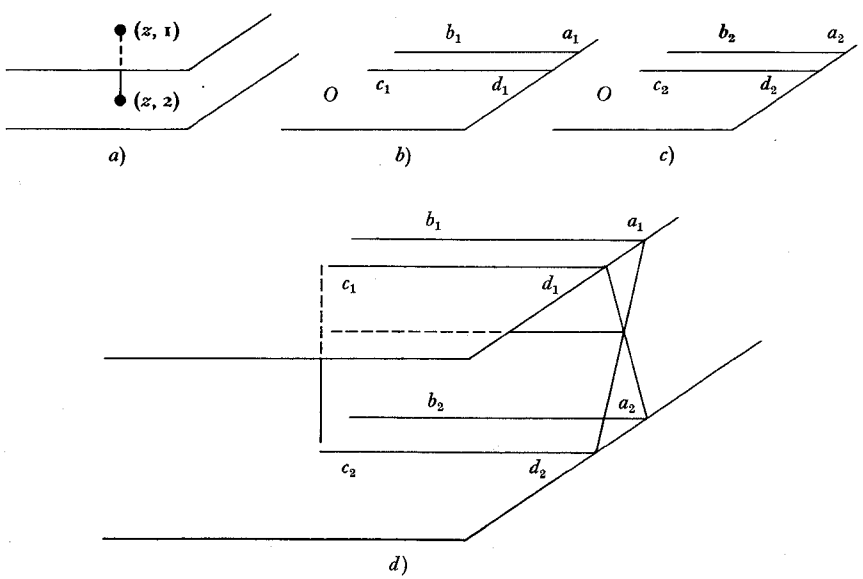


Figura 8.

I quattro schemi suggeriscono il «raccordo» mediante il quale si realizza la superficie di Riemann di $\sqrt{z}$.

Ma ciò che è importante non è tanto l'espediente che abbiamo descritto, per quanto interessante in sé esso sia, quanto la possibilità ora di svolgere su questa superficie una teoria delle funzioni, diversa ma confrontabile con quella sulla retta complessa.

Ciò suggerisce, in generale, l'idea di definire la superficie di Riemann come un ambiente nel quale abbiano senso i concetti di funzione olomorfa e meromorfa (cfr. oltre, § 4.5).

Si hanno dunque come primi esempi la stessa retta complessa **C** e immediatamente la retta complessa ampliata con il punto all'infinito. Una funzione olomorfa in $z = \infty$ è definita ponendo al posto della variabile z la variabile $1/z$ e vedendo poi se la nuova funzione è olomorfa per $z = 0$. Poiché il piano complesso con l'aggiunta del punto all'infinito è equivalente ad una sfera, si ha dunque una teoria delle funzioni sulla superficie sferica. Per il teorema di Liouville, essendo la superficie sferica compatta, le funzioni olomorfe sono solamente le costanti e le funzioni meromorfe sono tutte e sole le funzioni razionali. Ciò illumina completamente la teoria delle funzioni sulla sfera.

Analogamente a quanto s'è fatto per la radice quadrata, si può poi costruire la superficie di Riemann in corrispondenza ad una funzione algebrica $P(w, z) = 0$. Se si pensa alla funzione scritta $a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, si ha immediatamente che, ove non è nullo il discriminante del polinomio in w, ossia salvo che per valori particolari di z, vi sono n valori distinti $w_1, \ldots, w_n$ che si organizzeranno su una superficie ad n fogli. In corrispondenza ai valori eccezionali ove le radici $w_1, \ldots, w_n$ vengono a coincidere, del tutto o in parte, si avranno dei punti di diramazioni, simili, ma piú complicati, all'origine nel caso della radice.

Un importante teorema sulla teoria delle funzioni su questa superficie di Riemann è quello di Riemann-Roch. Esso fa intervenire il genere p della superficie, ossia un invariante legato al numero di «tagli» necessario per ridurre la superficie ad essere semplicemente connessa. Tale teorema misura la generalità di una funzione razionale sulla superficie di Riemann, che abbia assegnati poli.

TEOREMA. *La piú generale funzione razionale su una superficie di Riemann che ha poli del primo ordine in qualcuno o tutti i punti di un dato gruppo, ma che è in ogni altro punto finita, dipende da un numero di parametri uguale alla somma dell'ordine del gruppo e del genere della superficie, meno l'indice di specializzazione.*

Senza soffermarsi a descrivere l'indice di specializzazione, nozione piuttosto tecnica, si vuol sottolineare come questo teorema descriva appunto, tra le funzioni sulla superficie di Riemann, le funzioni razionali.

4. *Curve e superfici dal punto di vista differenziale.*

La considerazione delle curve e superfici dal punto di vista differenziale inizia quasi contemporaneamente all'introduzione del calcolo differenziale stesso. Naturalmente all'inizio si tratta di osservazioni sparse nel piú generale contesto dell'analisi matematica. Con Gauss e le sue *Disquisitiones generales circa superficies*

curvas [1828] si può dire che queste osservazioni trovano forma sistematica in una scienza autonoma: la geometria differenziale.

Questa scienza si svilupperà poi con Riemann e diverrà uno dei pilastri della teoria della relatività. Nella trattazione che segue, adotteremo una forma sistematica, accennando ove possibile i riferimenti storici. Inizieremo dalle curve piane, che sono il caso piú semplice ma contengono la maggior parte delle idee che verranno sviluppate poi.

4.1. Curve piane.

Dall' esperienza si trae che è utile trattare, all'interno della geometria differenziale, con una particolare classe di curve piane, le curve regolari.

Una curva regolare può essere definita come il luogo dei punti del piano rappresentati da un vettore

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

nel piano (x_1, x_2) al variare di t nell'intervallo specificato. Si pongono le ipotesi:

a) $\mathbf{x}(t)$ ha derivate seconde continue;
b) $\mathbf{x}'(t)$, il vettore derivato di $\mathbf{x}(t)$, non è mai nullo.

Le ipotesi che abbiamo posto sull'esistenza di derivate possono apparire abbastanza restrittive. Esse sono tuttavia opportune per una trattazione spedita e concettuale.

L'esistenza del vettore $\mathbf{x}'(t)$ prevista implicitamente dalla *a*) e la condizione *b*) che garantiscono come esso non sia mai nullo, permettono, per ogni punto della curva, di assegnare una direzione privilegiata, che diremo la direzione della retta tangente. Precisamente, se consideriamo un punto P_0, di coordinate $(x_1(t_0), x_2(t_0))$, possiamo definire la retta tangente come la retta passante per P_0 con direzione definita dal vettore $\mathbf{x}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0))$ ossia la retta individuata dal vettore $\mathbf{x}'(t_0)$. È utile, per facilitare l'intuizione, pensare il vettore $\mathbf{x}'(t_0)$ come posto nel punto P_0, come illustra la figura 9. Abbiamo dunque in ogni punto P della curva un vettore; risulta cosí definito un «campo» di vettori tangenti.

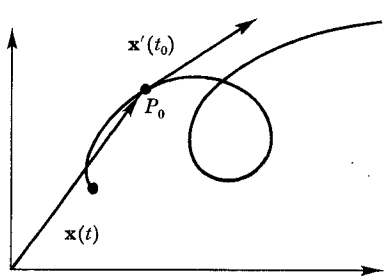


Figura 9.
Il vettore tangente $\mathbf{x}'(t_0)$ si pensa applicato nel punto P_0.

Ponendoci dal punto di vista fisico, immaginando che il parametro t rappresenti il tempo, $\mathbf{x}(t)$ può pensarsi come la traiettoria di un punto mobile. Allora $\mathbf{x}'(t)$ ed $\mathbf{x}''(t)$ s'interpretano rispettivamente come la velocità e l'accelerazione del punto il cui movimento è descritto da $\mathbf{x}(t)$. Si badi però, il vettore tangente ed il vettore accelerazione fanno riferimenti non al concetto di curva regolare che abbiamo dato ma al concetto di curva regolare *con una fissata parametrizzazione*. Infatti dal punto di vista fisico è di grande importanza non solo la forma della traiettoria, ossia la curva regolare, ma anche la sua legge di percorrenza.

Una delle idee direttrici del calcolo differenziale è che un tratto «infinitesimo» di curva possa essere considerato come rettilineo, e conseguentemente che una curva possa immaginarsi come una poligonale con lati infinitesimi. Sono passati quasi tre secoli da quando queste idee apparivano completamente legittime e rigorose ed una critica spietata ha costretto a rielaborarle e riproporle in forma assai piú sofisticata. Ma la sostanza di esse è rimasta inalterata, ed in esse si trova una facile ed intuitiva motivazione per definire la lunghezza di una curva regolare. Consideriamo un incremento dt del parametro t. Ne consegue una variazione delle funzioni $x_1(t)$ ed $x_2(t)$. Avremo cioè due incrementi dx_1 e dx_2. Se pensiamo che lo spostamento «infinitesimo» sia avvenuto lungo un tratto rettilineo ed indichiamo con ds la lunghezza di questo tratto (fig. 10), abbiamo dal teorema di Pitagora $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Ossia, osservando che $dx_1 = x_1' \, dt$, e $dx_2 = x_2' \, dt$, si ha $ds^2 = [(x_1')^2 + (x_2')^2] \, dt^2$, e dunque definiremo come lunghezza di una curva tra due punti A e B corrispondenti ai valori α e β del parametro t la quantità

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2} \, dt.$$

Osservando come $(x_1')^2 + (x_2')^2 = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)$, si ha, naturalmente,

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)} \, dt$$

per esprimere la stessa quantità.

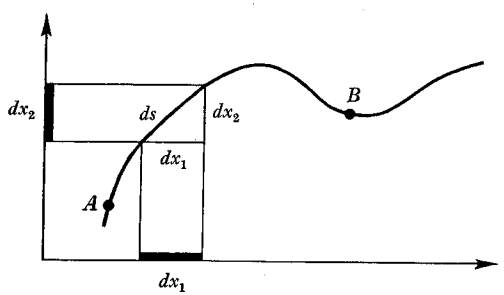


Figura 10.
La figura suggerisce la formula $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$.

Se consideriamo la lunghezza della curva da un punto fisso, corrispondente al valore α del parametro, ad un punto variabile, si ha

$$\int_\alpha^t \sqrt{\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t)}\,dt$$

e perciò

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}'(t)}\,dt=\sqrt{\mathbf{x}'(t)^2}.$$

Poiché $\mathbf{x}'(t)\neq 0$, si ha che la lunghezza dell'arco può sempre essere scelta come parametro per una curva regolare. Con una tale scelta si ricava poi, indicando la derivata rispetto ad s con un punto sovrapposto alla funzione, $|\dot{\mathbf{x}}(s)|=1$. Quando si sceglie come parametro l'arco, il vettore tangente diviene un vettore unitario, ossia un versore.

Vogliamo ora introdurre un concetto di importanza fondamentale per le curve piane: la curvatura. Introduciamo dapprima il concetto di curvatura totale. Consideriamo l'angolo che la tangente alla curva forma con l'asse x_1, che indichiamo con $\vartheta(s)$. La curvatura può essere definita come la differenza dei valori di ϑ nei punti terminali della curva.

Con riferimento alla figura 11, indicando con k_T la curvatura totale, si ha dunque $k_T=\vartheta_1-\vartheta_0$. Una volta introdotto il concetto di curvatura totale, viene abbastanza naturale (si pensi ai due concetti di velocità media e di velocità istantanea) definire la curvatura nel punto con

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vartheta(s+\Delta s)-\vartheta(s)}{\Delta s}=\dot{\vartheta}(s).$$

Osservando che

$$\dot{\mathbf{x}}(s)=\cos\vartheta(s)\,u_1+\sin\vartheta(s)\,u_2$$

si ha

$$\ddot{\mathbf{x}}(s)=(-\sin\vartheta(s)\,u_1+\cos\vartheta(s)\,u_2)\frac{d\vartheta}{ds}.$$

Ossia

$$\ddot{\mathbf{x}}(s)=(-\sin\vartheta(s)\,u_1+\cos\vartheta(s)\,u_2)\,k.$$

Un calcolo diretto dà allora

$$|k|=\sqrt{\ddot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}}=|\ddot{\mathbf{x}}|.$$

Osserviamo che se $k=0$ per ogni valore di s, allora

$$\ddot{\mathbf{x}}=0$$

e perciò

$$\mathbf{x}(s)=A+Bs \qquad A,\ B \text{ costanti},$$

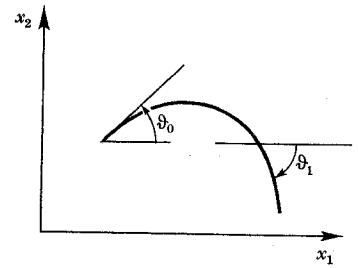


Figura 11.
La curvatura totale k_T è data da $k_T=\vartheta_1-\vartheta_0$.

si ha cioè una retta. La curvatura esprime dunque quanto una curva è differente da una linea retta.

L'importanza della curvatura è in parte spiegata dal seguente fondamentale

TEOREMA. *Se è assegnata una funzione continua arbitraria $k(s)$ per $s_0\leq s\leq s_1$ allora esiste una ed una sola curva regolare (definita a meno di un movimento rigido) per la quale $k(s)$ è la curvatura ed s la lunghezza dell'arco.*

Accenniamo la dimostrazione. Poiché, se esiste la curva che andiamo cercando, deve essere $k=\dot{\vartheta}(s)$ è naturale porre

$$\vartheta(s)=\vartheta(0)+\int_0^s k(\tau)\,d\tau.$$

Una volta definita la quantità $\vartheta(s)$, si pone $\dot{\mathbf{x}}(s)=\cos\vartheta(s)\mathbf{u}_1+\sin\vartheta(s)\mathbf{u}_2$ e poi

$$\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(0)+\mathbf{u}_1\int_0^s\cos\vartheta(\tau)\,d\tau+\mathbf{u}_2\int_0^s\sin\vartheta(\tau)\,d\tau.$$

Si tratta poi di dimostrare che la curva cosí definita verifica le condizioni poste, il che può calcolarsi direttamente.

Vogliamo concludere il discorso sulle curve piane con le equazioni di Frenet, le quali in sostanza ripropongono il teorema che abbiamo appena visto, in una forma però che può essere generalizzata al caso delle curve sghembe e delle superfici.

Introduciamo in ogni punto della curva una coppia di vettori ortogonali ed unitari $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Poniamo $\mathbf{v}_1(s)=\dot{\mathbf{x}}(s)$.

Osservando che $\dot{\mathbf{x}}(s)\cdot\dot{\mathbf{x}}(s)=1$, si ha $\dot{\mathbf{x}}(s)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(s)=0$, ossia il vettore $\ddot{\mathbf{x}}(s)$ è ortogonale al vettore tangente. Possiamo perciò porre $k\mathbf{v}_2=\ddot{\mathbf{x}}$.

Osserviamo ora che ogni vettore piano può essere espresso come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e di $\mathbf{v}_2$. Perciò, in particolare

$$\dot{\mathbf{v}}_1=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2$$
$$\dot{\mathbf{v}}_2=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2.$$

Poiché $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1$, e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, si ha

$$\dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 = 0$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 = 0.$$

Allora

$$\mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \alpha_1$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 = \beta_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \beta_2$$

e cioè $\alpha_1 = \beta_2 = 0$. Poi

$$\mathbf{v}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \alpha_2$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 = \beta_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \beta_1$$

e quindi $\beta_1 + \alpha_2 = 0$. Finalmente, abbiamo

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \alpha_2 \mathbf{v}_1$$
$$\dot{\mathbf{v}}_2 = -\alpha_2 \mathbf{v}_1.$$

Osservando che $\dot{\mathbf{v}}_1 = k\mathbf{v}_2$, abbiamo infine

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = k\mathbf{v}_2$$
$$\dot{\mathbf{v}}_2 = -k\mathbf{v}_1$$

cioè le equazioni di Frenet.

Queste equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee, che consente la determinazione di $\mathbf{v}_1(s)$ e di $\mathbf{v}_2(s)$. Questo sistema consente dunque ancora di risalire alla curva, con lo stesso grado di arbitrarietà, sebbene in maniera molto piú complicata.

La maggiore complessità del calcolo è tuttavia ripagata dal fatto che la stessa idea può essere riproposta per altre situazioni piú generali. Vogliamo concludere la trattazione differenziale delle curve piane con un esempio. Supponiamo di assegnare la curvatura $k = \text{cost}$. Abbiamo allora

$$\vartheta(s) = \vartheta(0) + \int_0^s k \, d\tau.$$

Assumendo $\vartheta(0) = 0$, si ha semplicemente $\vartheta(s) = k \cdot s$; allora

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \cos ks \, \mathbf{u}_1 + \sin ks \, \mathbf{u}_2.$$

Assumendo come versori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ i versori fondamentali degli assi x_1, x_2, si ha

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = (\cos ks, \sin ks).$$

Perciò

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \left(\frac{1}{k} \sin ks, \; -\frac{1}{k} \cos ks\right)$$

ed abbiamo dunque l'equazione di una circonferenza, con centro nel punto $\mathbf{x}(0)$, di raggio $1/k$.

4.2. Curve spaziali.

Dopo quanto abbiamo visto sulle curve piane, possiamo procedere sbrigativamente per trattare delle curve spaziali. Una curva regolare è definita similmente come il luogo dei punti descritti dal vettore $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ con le stesse ipotesi di derivabilità, ed ancora $\mathbf{x}'(t) \neq 0$.

In modo analogo si può definire la lunghezza di una curva mediante $s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\mathbf{x}'(\tau) \cdot \mathbf{x}'(\tau)} \, d\tau$, la curvatura mediante $k(s) = |\ddot{\mathbf{x}}|$. Va osservato tuttavia che nel caso delle curve spaziali non è possibile assegnare un significato geometrico al segno della curvatura, contrariamente a quanto avviene per le curve piane.

Anche nel caso delle curve spaziali possiamo introdurre un riferimento formato questa volta da tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, assumendo

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{v}_2 = \ddot{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

e possiamo definire la torsione di una curva spaziale in modo analogo a quanto è stato fatto per la curvatura in relazione alla tangente. Si pone cioè la torsione totale

$$\tau_T = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\dot{\mathbf{v}}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}}_3} \, ds$$

e dunque

$$|\tau| = \sqrt{(\dot{\mathbf{v}}_3)^2} = |\dot{\mathbf{v}}_3|.$$

Se poi si osserva che $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 1$, si ha $\mathbf{v}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}}_3 = 0$. Poi $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ e dunque $\dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_3 = 0$. Ma $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$ e allora $k\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_3 = 0$, cioè $\dot{\mathbf{v}}_3$ è perpendicolare a $\mathbf{v}_1$. Essendo anche $\dot{\mathbf{v}}_3$ perpendicolare a $\mathbf{v}_3$ si ha che $\dot{\mathbf{v}}_3 = \pm\lambda\mathbf{v}_2$. Essendo $|\dot{\mathbf{v}}_3| = |\tau|$ si ha $|\tau| = |\lambda|$. Per ragioni di semplicità, si sceglie poi τ in modo che $\dot{\mathbf{v}}_3 = -\tau\mathbf{v}_2$.

In modo analogo si procede per ricavare le equazioni di Frenet e si ottiene questa volta:

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = 0 + k\mathbf{v}_2 + 0$$
$$\dot{\mathbf{v}}_2 = -k\mathbf{v}_1 + 0 + \tau\mathbf{v}_3$$
$$\dot{\mathbf{v}}_3 = 0 - \tau\mathbf{v}_2 + 0.$$

Gli zeri che abbiamo scritto servono a sottolineare il carattere particolare ed emisimmetrico della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

ed è facile da questa forma estrapolare il seguente risultato generale:

TEOREMA. *Assegnata la matrice emisimmetrica $n \times n$ della forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & -c_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

ove le c_i sono assegnate funzioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^{n-1}, \mathcal{C}^{n-2}, \dots, \mathcal{C}^0$ di un parametro s esiste una ed una sola curva dello spazio $\mathbf{R}^n$, definita a meno di movimenti rigidi, per la quale la matrice precedente dia le equazioni di Frenet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_1 &= c_1 \mathbf{v}_2 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 &= -c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_3 \\ \dot{\mathbf{v}}_n &= -c_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}. \end{aligned}$$

La dimostrazione si effettua in maniera sostanzialmente analoga a quanto fatto nello spazio ordinario. Le ipotesi sulla differenziabilità sono poste in modo che la scrittura delle equazioni di Frenet abbia significato.

4.3. Superfici dello spazio ordinario dal punto di vista locale.

Lo studio delle superfici che vediamo ora è considerato «in piccolo» ossia nell'intorno di un punto. Vedremo poi come si effettui lo studio «in grande» collezionando pezzi di superficie. Successivamente vedremo anche qualche elemento di geometria intrinseca, secondo le idee di Riemann.

Anche nel caso delle superfici è opportuno trattare con una classe ristretta di superfici regolari. Una superficie regolare è il luogo dei punti dello spazio euclideo tridimensionale definiti da un vettore $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ ove le funzioni x_i, $i = 1, 2, 3$, sono definite su un aperto connesso del piano u, v dei parametri ed hanno derivate parziali sino all'ordine quattro (anche qui si potrebbero assumere ipotesi piú generali). È inoltre necessario supporre che i due vettori coordinati $\mathbf{x}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial u$, $\mathbf{x}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial v$, siano indipendenti. Ciò significa che la matrice

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ha caratteristica 2. Questa ipotesi assicura che le funzioni x_i dipendono effettivamente da *due* parametri u e v, e non per esempio da $u+v$, uv, ... In tal caso si otterrebbe infatti una curva e non una superficie.

Se consideriamo in un punto della superficie, corrispondente ad una scelta dei valori dei parametri u e v i vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, essi definiscono un piano che viene

detto piano tangente nel punto considerato. Il suo significato geometrico è illustrato dal

TEOREMA. *Il piano tangente è definito dalle rette tangenti alle curve regolari passanti per il punto considerato.*

DIMOSTRAZIONE. *Una curva regolare è definita assegnando i due parametri u e v come funzioni del parametro t. Si ha cioè $\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \mathbf{x}(t)$, e quindi $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}_1 u' + \mathbf{x}_2 v'$ e dunque ogni curva regolare ha la tangente nel piano considerato. Poiché u' e v' possono assumere tutti i valori (basta porre $u = at$, $v = bt$), si ha che il piano viene descritto interamente al variare della curva regolare.*

La scelta in ogni punto del piano tangente determina anche in ogni punto una direzione perpendicolare, e quindi un vettore $\mathbf{x}_3$ unitario che viene detto il versore normale alla superficie. I suoi parametri direttori sono perciò proporzionali ai minori estratti dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ancora una curva tracciata sulla superficie, ossia $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. La sua lunghezza è data da

$$s(t) = \int_{t_1}^{t} \sqrt{(\mathbf{x}'(\tau))^2}\, d\tau$$

ed allora

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

utilizzando le lettere E, F, G, introdotte da Gauss, per denotare $E = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1$, $F = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$, $G = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2$. La forma quadratica $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$ è detta la prima forma fondamentale. Essa è definita positiva, si annulla cioè solamente per $u' = v' = 0$. Si può dimostrare infatti che $EG - F^2 > 0$, il che equivale alla condizione da dimostrare. Un altro fatto d'importanza fondamentale è che, pur non essendo i coefficienti E, F, G invarianti per un cambiamento di parametri, tale è la prima forma fondamentale. Questo fatto è ovvio se si pensa alla superficie immersa nello spazio tridimensionale. Vedremo come nella geometria riemanniana si assuma una posizione diversa; si chiede cioè l'invarianza di tale forma, prescindendo dalla immersione. È un altro fatto importante che anche l'angolo tra due direzioni definite da due curve regolari che s'intersecano in un punto della superficie possa essere espresso mediante le quantità E, F, G, ed anche l'area fa intervenire le stesse quantità, avendosi infatti $A = \iint_S \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$, ove S è la regione dei parametri u, v.

La seconda forma fondamentale è introdotta per studiare la deviazione di una superficie dal piano tangente. Se supponiamo che il punto in esame sia dato dai valori $u=v=0$ dei parametri, si ha sviluppando in formula di Taylor

$$\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{x}(0, 0)+\mathbf{x}_1 u+\mathbf{x}_2 v+(\mathbf{x}_{11}u^2+2\mathbf{x}_{12}uv+\mathbf{x}_{22}v^2)/2+\ldots$$

avendo posto

$$\mathbf{x}_{11}=\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^2} \qquad \mathbf{x}_{12}=\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u\,\partial v} \qquad \mathbf{x}_{22}=\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial v^2}.$$

Moltiplicando ora per $\mathbf{x}_3$ otteniamo la misura dello scostamento dal piano tangente mediante la seconda forma fondamentale $Lu^2+2Muv+Nv^2$, avendo posto questa volta $L=\mathbf{x}_{11}\cdot\mathbf{x}_3$, $M=\mathbf{x}_{12}\cdot\mathbf{x}_3$, $N=\mathbf{x}_{22}\cdot\mathbf{x}_3$.

Lo studio del punto della superficie può ora essere compiuto con l'aiuto del paraboloide osculatore $z=(Lu^2+2Muv+Nv^2)/2$, portando alla distinzione tra i casi ellittico, iperbolico, parabolico, planare, a seconda della natura di tale paraboloide. Il comportamento della superficie nell'intorno del punto considerato è qualitativamente simile a quello descritto dal paraboloide osculatore.

Un'altra quantità d'importanza fondamentale è la curvatura gaussiana, che indicheremo con K. Essa può essere definita nel modo seguente: si considera l'immagine sferica del versore $\mathbf{x}_3(u, v)$ ossia si trasporta il vettore $\mathbf{x}_3$ parallelamente a se stesso in modo che il punto iniziale si trovi nell'origine o. Mentre $\mathbf{x}(u, v)$ descrive una certa regione della superficie, $\mathbf{x}_3(u, v)$ descrive in corrispondenza una certa regione sulla sfera unitaria. La curvatura gaussiana è ora definita come il rapporto tra l'elemento d'area dell'immagine sferica e l'elemento d'area della superficie (fig. 12). Il calcolo diretto dà per K la espressione

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

e dunque la curvatura gaussiana è definita mediante la prima e la seconda forma fondamentale. Si ha però il fondamentale *theorema egregium* di Gauss:

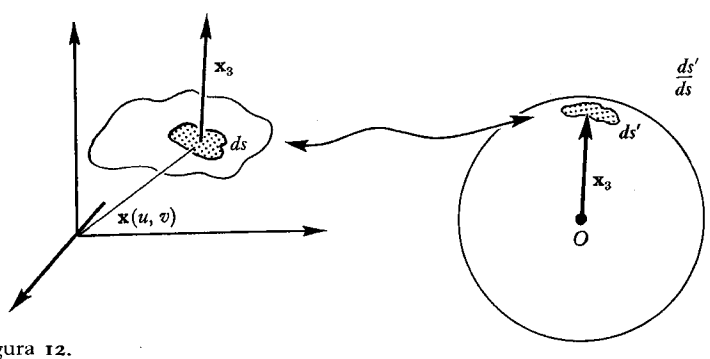


Figura 12.
Il rapporto ds'/ds definisce la curvatura gaussiana.

TEOREMA. *La curvatura K dipende solamente dai coefficienti della prima forma fondamentale e da certe loro derivate prime e seconde.*

L'espressione di tale dipendenza è data dalla formula:

$$\sqrt{EG-F^2}\cdot K=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FE_v-EG_u}{2E\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2EF_u-FE_u-EE_v}{2E\sqrt{EG-F^2}}\right).$$

Da questa formula non appare un'altra proprietà fondamentale della curvatura gaussiana, *essa è invariante rispetto alle trasformazioni di parametri.*

Il *theorema egregium* suggerisce la possibilità di studiare trasformazioni piú generali dei movimenti rigidi dello spazio d'immersione. Se noi consideriamo trasformazioni che conservano la lunghezza delle curve tracciate sulla superficie, come si dice delle isometrie, abbiamo ancora la possibilità di definire la curvatura gaussiana K. Ciò significa in ultima analisi studiare la geometria delle superfici in modo *intrinseco*, ossia prescindendo dall'immersione. Accenneremo questo punto di vista successivamente.

In modo analogo a quanto fatto per le curve, vediamo ora di ricavare le equazioni differenziali della teoria delle superfici. Ancora abbiamo un riferimento $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ formato dai due vettori fondamentali e dal vettore normale e dunque i vettori derivati $\mathbf{x}_{ij}=\partial^2\mathbf{x}/\partial u^i\,\partial u^j$ e $\mathbf{x}_{3j}=\partial\mathbf{x}_3/\partial u_j$ (ove si sono indicati i parametri con u^1, u^2 invece che con u, v per avere un formalismo piú comodo) sono esprimibili come combinazione lineare dei vettori fondamentali. Abbiamo un primo gruppo di equazioni dovuto a Gauss, che si ottiene dall'uguaglianza

$$(1) \qquad \mathbf{x}_{ik}=\Gamma^l_{ik}\mathbf{x}_1+a_{ik}\mathbf{x}_3$$

ove si è soppresso il simbolo di sommatoria, sostituendolo con la convenzione, dovuta ad Einstein, che un indice ripetuto, in basso ed in alto o viceversa, significhi la stessa cosa.

Scriviamo la prima forma fondamentale, introducendo la matrice

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

ponendo $g_{12}=g_{21}$ e rispettivamente $E=g_{11}$, $F=g_{12}$, $G=g_{22}$, nella forma $ds^2=g_{ik}du^i du^k$ con le stesse convenzioni sulla soppressione del simbolo di sommatoria. Poniamo anche per comodità

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

Ora operiamo sulle equazioni date. Si ha intanto $\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_k=g_{ik}$, perciò, se moltiplichiamo la (1) per $\mathbf{x}_m$, si ha $\mathbf{x}_{ik}\cdot\mathbf{x}_m=\Gamma^l_{ik}g_{lm}$. Si tratta ora di valutare i simboli Γ^l_{ik} introdotti da Christoffel. Un calcolo diretto fornisce

$$\mathbf{x}_{ik}\cdot\mathbf{x}_m=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^m}\right).$$

La quantità $\mathbf{x}_{ik}\cdot\mathbf{x}_m$ è dunque nota a partire dalla g_{ik}. Posto $\mathbf{x}_{ik}\cdot\mathbf{x}_m=\Gamma_{ikm}$, abbiamo $\Gamma_{ikm}=\Gamma^l_{ik}g_{lm}$ e perciò

$$\Gamma_{ikm}g^{lm}=\Gamma^l_{ik}$$

che dà infine il valore dei simboli Γ^l_{ik}.

Osservando poi che $\mathbf{x}_l\cdot\mathbf{x}_3=0$ si ha, ancora dalla (1), $\mathbf{x}_{ik}\cdot\mathbf{x}_3=a_{ik}$ e, ricordando come sono definiti i coefficienti della seconda forma fondamentale (e ponendo per comodità $L=L_{11}$, $M=L_{12}=L_{21}$, $N=L_{22}$), si ha $a_{ik}=L_{ik}$. Abbiamo finalmente le equazioni di Gauss

$$\mathbf{x}_{ik}=\Gamma^l_{ik}\mathbf{x}_l+L_{ik}\mathbf{x}_3.$$

Con ragionamenti analoghi si ottengono le equazioni di Weingarten

$$\mathbf{x}_{3i}=-L_{ij}g^{kj}\mathbf{x}_k.$$

Le equazioni che abbiamo ottenuto, di Gauss e di Weingarten, sono scritte mediante i coefficienti g_{ik} della prima forma fondamentale, ed i coefficienti L_{ik} della seconda forma fondamentale. Per esse, che sono analoghe alle equazioni di Frenet, in quanto esprimono i vettori derivati a partire dai vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, si pongono gli stessi problemi:

1) esistenza di una data superficie assegnati i coefficienti g_{ik} ed L_{ik};
2) unicità di questa superficie.

Il problema nel caso delle superfici è fondamentalmente diverso da quello delle curve. Mentre infatti si può garantire la unicità, il problema dell'esistenza richiede il verificarsi di condizioni di compatibilità. Ciò del resto è chiaro, se consideriamo il *theorema egregium* di Gauss. Un'espressione contenente le g_{ik} e le L_{ik} si esprime solamente mediante le g_{ik}, il che esprime appunto un legame tra le due quantità.

Perché esista una soluzione del problema 1) occorre che siano verificate (oltre alla condizione espressa dal *theorema egregium*) anche le equazioni di Codazzi e Mainardi, delle quali omettiamo di scrivere l'espressione analitica piuttosto tecnica.

4.4. Geometria intrinseca, considerata con l'aiuto dell'immersione.

Abbiamo già avuto modo di osservare, trattando del *theorema egregium* di Gauss, come una trasformazione della superficie che lasci inalterata la lunghezza delle curve ivi tracciate lasci inalterata anche la curvatura gaussiana K. Vi sono dunque proprietà geometriche che non dipendono dall'immersione della superficie nello spazio euclideo tridimensionale.

Si può dunque pensare di studiare una geometria intrinseca delle superfici confinando l'attenzione al piano dei parametri, definendo un elemento lineare $ds^2=g_{ik}\,du^i\,du^k$ mediante le funzioni g_{ik} in modo che la forma differenziale quadratica sia definita positiva. È come se si ritenesse importante per lo studio di una superficie solamente la prima forma fondamentale e tutto ciò che può

dedursi da essa; dunque un atteggiamento naturale è assegnare solamente essa astrattamente.

Quest'idea, di studiare intrinsecamente le superfici (piú in generale le varietà di dimensione qualsiasi), è dovuta a Riemann. Vale la pena di citarne le parole: «Nel concetto di superficie, insieme alle relazioni metriche intrinseche nelle quali viene presa in considerazione solo la lunghezza dei percorsi tracciati su di essa, sono contemporaneamente sempre presenti i suoi rapporti con punti che si trovano al di fuori di essa. Si può tuttavia fare astrazione dalle relazioni estrinseche, quando si fanno subire alle superfici cambiamenti che lascino immodificata la lunghezza delle linee tracciate su di esse; cioè immaginando di incurvare le superfici a piacere, senza che subiscano stiramenti, e considerando equivalenti tutte le superfici che nascono in questo modo l'una dall'altra. Per esempio, una superficie cilindrica o conica qualsivoglia viene considerata equivalente a un piano dal momento che la si può ottenere da quest'ultimo semplicemente flettendolo, mentre rimangono invariate le relazioni metriche interne; e tutti i teoremi che riguardano questa nuova superficie – l'intera planimetria – rimangono pienamente validi; essa è invece sostanzialmente diversa da una superficie sferica, che non può venir trasformata in un piano senza stiramento» [Riemann 1854, trad. it. p. 214].

Come si vede è espresso con grande chiarezza un «programma» di studio della geometria intrinseca. Naturalmente esso è significativo nella misura in cui è possibile trattare intrinsecamente i concetti di curva sulla superficie, di angolo fra direzioni, di vettori tangenti e cosí via.

Nel seguito introdurremo queste quantità utilizzando l'immersione della superficie nello spazio euclideo, ma avendo cura di mostrare come esse siano definibili solamente a partire dalle g_{ik}. Cosí sarà poi facile dare senso ai concetti della geometria riemanniana.

Un concetto fondamentale che vogliamo illustrare è quello di trasporto parallelo, introdotto da Levi-Civita.

In un punto P della superficie, abbiamo definito il piano tangente come luogo dei vettori che sono combinazione lineare dei vettori coordinati. Naturalmente questo fa riferimento alla immersione, è però possibile svincolarsi da essa. Si ricordi infatti che il piano tangente era il piano dei vettori tangenti alle curve regolari passanti per il punto. Una curva regolare può essere definita ponendo $u^i=u^i(t)$ e supponiamo che il punto nel quale vogliamo definire il piano tangente si ottenga per $t=0$. Allora un vettore tangente è dato assegnando $\dot{u}^1(0)$, $\dot{u}^2(0)$. Si può dunque prendere come definizione di vettore tangente in un punto l'insieme delle derivate prime $(\dot{u}^1(0), \dot{u}^2(0))$. Abbiamo dunque un concetto di vettori della superficie che prescinde dall'immersione; un vettore in P è naturalmente un vettore del piano tangente definito in P.

Immaginiamo ora di considerare due punti diversi P e Q della superficie. È possibile istituire un confronto tra le due geometrie dei due piani tangenti? È possibile in particolare istituire una nozione di parallelismo? Daremo dapprima una definizione provvisoria, che si rivelerà inefficiente. Dalla critica a questa definizione, apparirà cosa deve essere fatto.

Supponiamo dunque che Q appartenga ad un intorno di P, e sia $\mathbf{v}$ un vettore del piano tangente in P. Un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ nel piano tangente in Q non può essere definito semplicemente come un vettore parallelo in senso ordinario, poiché può darsi che la direzione di $\mathbf{v}$ non appartenga al piano tangente in Q. La piú naturale definizione è allora quella di considerare «parallelo» il vettore $\mathbf{v}^*$ che *forma con* $\mathbf{v}$ *l'angolo minimo*. Il vettore $\mathbf{v}^*$ è cosí perfettamente definito ed è un vettore del piano tangente in Q.

Al variare di Q in un intorno di P possiamo pensare cosí di avere definito un campo di vettori paralleli. Tuttavia, se tentiamo di estendere questa nozione di parallelismo all'intera superficie, incontriamo una contraddizione. Consideriamo ad esempio una sfera ed un punto P su di essa e supponiamo di trasportare il vettore $\mathbf{v}$ parallelamente (secondo la definizione data) da P a Q, poi in R, poi ancora in P, come illustra la figura 13. Il vettore $\mathbf{v}$ restando parallelo dà origine, tornando in P, a due vettori differenti! Evidentemente non si ha una buona nozione di parallelismo.

L'idea fondamentale di Levi-Civita è quella di definire la nozione di *parallelismo lungo una specifica curva della superficie*. Consideriamo una curva sulla superficie assegnando $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$. Possiamo definire, come in precedenza, la nozione di parallelismo, questa volta lungo la curva. Supponiamo che P corrisponda al valore t_0 del parametro. Se consideriamo un incremento Δt del parametro e definiamo $\mathbf{v}^*(t_0+\Delta t)$ parallelo in $t_0+\Delta t$, si osserva che il vettore differenza $\mathbf{v}^*(t_0+\Delta t)-\mathbf{v}(t_0)$ è un vettore normale alla superficie a meno di termini del secondo ordine in Δt. Allora viene naturale chiedere che la derivata $d\mathbf{v}/dt = \dot{\mathbf{v}}$ lungo la curva sia sempre un vettore normale alla superficie.

La condizione di parallelismo secondo Levi-Civita è allora espressa da:

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x}_1 = 0$$
$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x}_2 = 0.$$

Queste condizioni determinano una coppia di equazioni differenziali del primo ordine che determinano il vettore $\mathbf{v}(t)$ lungo ogni assegnata curva regolare. Infatti, se $\mathbf{v}(t) = v^i(t)\mathbf{x}_i(t)$, si ha $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x}_j = \dot{\mathbf{v}}^i g_{ij} + v^i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{x}_j = \dot{\mathbf{v}}^i g_{ij} + v^i \alpha_{ij} = 0$.

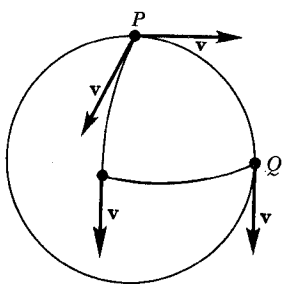


Figura 13.

Il vettore $\mathbf{v}$, muovendosi parallelamente a se stesso secondo due diversi percorsi, dà luogo a due vettori distinti!

Osserviamo ora che se le equazioni vengono integrate lungo due differenti curve con lo stesso punto iniziale e terminale, non vi è alcuna ragione perché debba trovarsi nel punto terminale lo stesso risultato.

Con l'introduzione di questa nozione di parallelismo ciò che prima appariva bizzarro è ora perfettamente naturale. Anzi, parrebbe ora strano che lungo una curva chiusa il trasporto parallelo debba condurre allo stesso risultato.

Nel definire il trasporto parallelo lungo una curva si è fatto uso dell'immersione. Si può però dimostrare che le equazioni di Levi-Civita possono porsi nella forma

$$\dot{\mathbf{v}}^2 + v^i \dot{u}_j \Gamma^2_{ij} = 0$$

con il che sono rese perfettamente indipendenti dall'immersione.

Vediamo ora qualche proprietà del trasporto parallelo.

1) Il prodotto scalare di due vettori ha valore costante lungo una data curva C. Infatti

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{v}}'\mathbf{u} + \mathbf{v}\dot{\mathbf{u}}'$$

e poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori tangenti e $\dot{\mathbf{u}}'$ e $\dot{\mathbf{v}}'$ sono normali si ha

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Naturalmente anche qui si fa uso dell'immersione, ma si può ancora vedere come se ne possa dare una dimostrazione indipendente.

Da questa proprietà segue immediatamente:

2) Il trasporto parallelo conserva le lunghezze e gli angoli.
3) Nel piano ordinario il parallelismo di Levi-Civita coincide con il parallelismo ordinario.

Queste tre proprietà affermano dunque che la geometria intrinseca approfondisce e generalizza la geometria ordinaria. Un altro fatto di fondamentale importanza è dato dal

TEOREMA. *Tutte e sole le superfici per le quali il trasporto parallelo non dipende dalla curva lungo la quale esso viene effettuato sono le superfici per le quali* $K = 0$.

Abbiamo già osservato, trattando delle curve, come una quantità di importanza fondamentale è costituita dalla curvatura. Questa può naturalmente essere definita anche per una curva tracciata sulla superficie, ma chiaramente non rimane invariante trasformando la superficie con una isometria. Ne consegue la necessità di ricercare una definizione di curvatura che abbia questa caratteristica, ossia una definizione di curvatura intrinseca.

Questa curvatura, che viene detta curvatura geodetica, può essere definita nel modo seguente: si considera un campo di vettori paralleli nel senso di Levi-Civita lungo la curva. Questo permette di definire un angolo $\vartheta(s)$ tra il vettore tangente alla curva ed il vettore del campo scelto. Poiché nel piano il parallelismo

di Levi-Civita coincide con il parallelismo ordinario, questo angolo è quello la cui derivata definisce la curvatura. Quest'idea si estende alla situazione che stiamo considerando: la curvatura geodetica è la derivata di $\vartheta(s)$, ove $\vartheta(s)$ è definito come l'angolo tra la tangente alla curva ed il vettore del campo scelto.

Con questa definizione è chiaro il carattere intrinseco della curvatura geodetica.

Nel caso del piano, le linee con curvatura uguale a zero sono le linee rette. Questo suggerisce di considerare le linee sulla superficie caratterizzate dall'avere curvatura geodetica uguale a zero. Esse sono dette linee geodetiche.

Due fatti importanti sono dimostrabili per le linee geodetiche:

1) I vettori tangenti ad una linea geodetica formano un campo di vettori paralleli.
2) La normale principale ad una curva geodetica concide con la normale alla superficie.

La proprietà 1) generalizza la proprietà che, lungo una linea retta, il vettore tangente è sempre diretto come la retta stessa. La 2) consente in casi particolari di individuare le linee geodetiche. Per esempio consente di riconoscere che i cerchi massimi sono linee geodetiche sulla sfera.

Nel caso del piano, ancora, le linee rette possiedono un'importante proprietà: esse sono le linee di minima distanza. Dati due punti A e B la linea «piú breve» che congiunge A e B è una linea retta. Dati due punti su una superficie le linee geodetiche realizzano ancora questa proprietà? Questo conduce a due problemi distinti, prima di tutto l'esistenza di una linea geodetica che congiunge due punti, e poi la unicità. Considerazioni molto semplici mostrano come non si possa dare una risposta completamente esauriente.

Abbiamo già osservato che le linee geodetiche sulla sfera sono i cerchi massimi. Se consideriamo due punti diametrali, allora essi sono congiunti da infiniti cerchi massimi, il che mostra che non vale in generale la unicità.

Per il problema dell'esistenza, basta considerare la figura 14. Il cerchio massimo per P e Q è la linea geodetica che congiunge questi punti. Se noi togliamo un punto R, come in figura, da questa linea, evidentemente non abbiamo piú una linea che «realizza» la minima distanza, per quanto vi siano linee che la approssimano tanto quanto si vuole. Con la soppressione di R, non abbiamo piú alcuna linea geodetica tra P e Q.

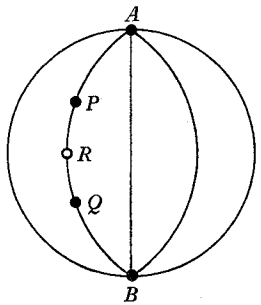


Figura 14.

Togliendo il punto R dalla superficie sferica, non esiste piú una linea che realizza la minima distanza.

Abbiamo tuttavia un risultato che mostra come, in piccolo, le cose vanno abbastanza bene; si ha infatti:

TEOREMA. *Per un dato punto P di una superficie, esiste sempre un intorno tale che ogni punto Q in esso può essere congiunto a P da una linea geodetica la quale realizza la minima lunghezza.*

Vogliamo concludere questo paragrafo accennando ai collegamenti che intercedono tra la geometria differenziale e le geometrie non-euclidee. In un certo senso il punto di vista della geometria differenziale «spiega» le geometrie non-euclidee.

Osserviamo intanto che superfici isometriche necessariamente hanno la stessa curvatura gaussiana, ma naturalmente non vale il risultato reciproco. Non è detto che superfici con la stessa curvatura gaussiana siano isometriche. Questo risultato è però vero se la curvatura gaussiana è costante.

TEOREMA. *Due superfici aventi lo stesso valore costante della curvatura gaussiana sono isometriche.*

Per ogni valore (costante) di K vi è dunque un modello di superficie.

Un altro fondamentale risultato per le superfici con curvatura costante che enunciamo in forma intuitiva è:

TEOREMA (Gauss). *Su una superficie di curvatura costante una figura può essere spostata arbitrariamente senza alterare angoli e lunghezze.*

Questo sta a significare che su una superficie di curvatura costante è possibile fare della geometria esattamente come nel piano. Ma quale tipo di geometria?

Vediamo due importanti risultati.

TEOREMA. *L'angolo tra la posizione iniziale e finale di un vettore trasportato per parallelismo lungo una linea chiusa è dato dall'integrale della curvatura gaussiana esteso alla regione delimitata dalla curva.*

Se indichiamo con A questa regione, indicando con α quest'angolo, si ha la formula $\alpha = \iint_A k\, dS$, ove dS è l'elemento d'area. Da questo teorema consegue il risultato già incontrato in precedenza, il trasporto per parallelismo è indipendente dal percorso se e solo se $K = 0$.

L'altro risultato è la celebre formula di Gauss-Bonnet. Consideriamo un «poligono» tracciato sulla superficie, ossia una curva chiusa composta da un certo numero di archi regolari, che si congiungono in «vertici» cioè punti ove cade la derivabilità. Se indichiamo con C tale poligono e con A la regione interna,

si ha, con riferimento alla figura 15, indicando con k_g la curvatura geodetica,

$$\iint_A k\, dS + \int_C k_g\, ds = 2\pi - \sum (\pi - \beta_\nu).$$

Consideriamo in particolare un triangolo geodetico, formato da tre geodetiche per le quali $k_g = 0$. Allora

$$\iint_A k\, dS = \sum_{\nu=1} \beta_\nu - \pi.$$

E dunque la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore uguale o minore di π a seconda che K sia positiva nulla o negativa, cioè proprio la fondamentale distinzione tra geometrie euclidee e non-euclidee.

Le geometrie euclidee e non-euclidee possono dunque essere presentate secondo un punto di vista che consente di coglierne la unità.

Abbiamo visto come sulle superfici di curvatura costante, in base al teorema di Gauss, sia possibile il movimento rigido. Minding ha mostrato anche (1839-40) come questa proprietà sia caratteristica di queste superfici. Cioè: se è possibile il movimento rigido la curvatura è costante.

Questa proprietà delle superfici di curvatura costante, opportunamente estesa, è stata una delle motivazioni fondamentali del già citato lavoro di Riemann e dei lavori di Helmholtz sull'analisi del concetto di spazio.

4.5. Geometria differenziale in grande. Definizione di varietà riemanniana.

Per trattare la geometria differenziale in grande occorrono notevoli strumenti di topologia. Ci limiteremo quindi ad accennare alcune cose essenziali.

Occorre, innanzi tutto, la definizione di varietà topologica n-dimensionale. Essa è la seguente:

DEFINIZIONE. *Una varietà topologica n-dimensionale è uno spazio di Hausdorff che è localmente omeomorfo ad uno spazio euclideo* $\mathbf{R}^n$.

Per semplicità supporremo anche che una varietà topologica ammetta una base numerabile.

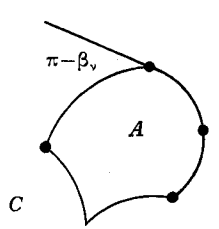


Figura 15.
Il poligono tracciato è utilizzato per la dimostrazione della formula di Gauss-Bonnet.

Su una varietà topologica n-dimensionale V si può dare una struttura differenziabile, secondo la definizione seguente:

DEFINIZIONE. *Una struttura differenziabile è data da una collezione* (U_j, f_j) *tale che*

I) $\cup U_j = V$;
II) *per ogni aperto* U_j *è data una applicazione topologica* f_j *in un aperto* $f_j(U_j)$ *di* $\mathbf{R}^n$;
III) *se* U_j *e* U_k *sono due aperti del ricoprimento e consideriamo* f_j, f_k, $U_j \cap U_k$ *sarà mandato da* f_j *in* $f_j(U_j \cap U_k)$; *da* f_k *in* $f_k(U_j \cap U_k)$. *Si richiede che l'applicazione* $f_j \circ f_k^{-1}$ *sia un* C^∞ *omeomorfismo di* $f_k(U_j \cap U_k)$ *in* $f_j(U_j \cap U_k)$ (cfr. fig. 16).

La condizione III) potrebbe essere indebolita richiedendo semplicemente che $f_j \circ f_k^{-1}$ sia un diffeomorfismo di classe C^k, ma per semplicità preferiamo l'ipotesi posta.

Possiamo ora porre la definizione seguente:

DEFINIZIONE. *Una varietà differenziabile è data da una varietà topologica sulla quale è definita una struttura differenziabile.*

La pratica del calcolo con le piú semplici varietà, curve, superfici, ecc. suggerisce naturalmente che diverse strutture differenziabili diano luogo alla «stessa» varietà. Ciò motiva la seguente definizione:

DEFINIZIONE. *Due strutture differenziabili* $\{U_j, f_j\}$ *e* $\{V_k, g_k\}$ *si dicono equivalenti se la loro unione è ancora una struttura differenziabile.*

È un fatto notevole, dimostrato da Milnor nel 1956, che su una stessa varietà topologica possono esservi strutture differenziabili non equivalenti. Ciò significa

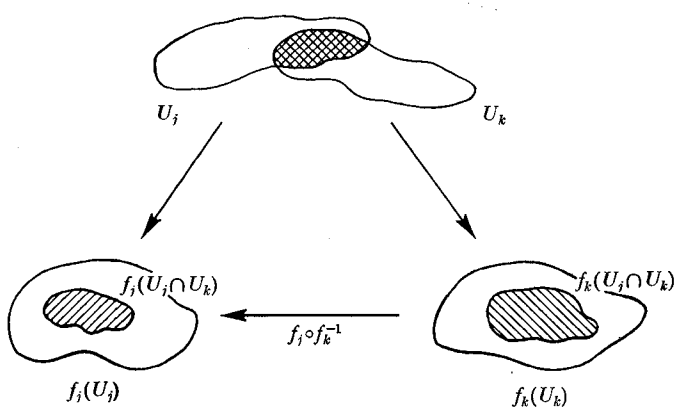


Figura 16.
$f_k(U_j \cap U_k)$ è mappato da $f_j \circ f_k^{-1}$ su $f_j(U_j \cap U_k)$.

che la struttura topologica non «condiziona», almeno in generale, la struttura differenziabile. L'aspetto topologico e l'aspetto differenziale, per quanto profondamente interconnessi, devono tuttavia necessariamente essere pensati come momenti separati.

Si osserverà come la struttura di varietà differenziabile sia un terreno abbastanza povero per fare della geometria. Non si può parlare di lunghezze, di angoli, ecc. Si tratterà dunque di introdurre questi concetti, il che dovrà farsi naturalmente in maniera intrinseca, poiché non abbiamo a disposizione alcun concetto di immersione.

Tuttavia è utile dare, già a questo livello astratto, i due concetti di applicazione differenziabile e di fibrato tangente.

La prima definizione si pone in maniera completamente naturale. Se V e W sono due varietà differenziabili con strutture (U_j, f_j) e (V_k, g_k) rispettivamente, allora una funzione continua $\Phi : V \to W$ è detta un'applicazione differenziabile se per ogni j e k

$$g_k^{-1}\Phi f_j : f_j^{-1}(f_j(U_j) \cap \Phi^{-1}g_k(V_k)) \to V_k$$

è differenziabile di classe C^∞. In particolare, ponendo $W = \mathbf{R}$, ove quest'ultimo ha la struttura differenziabile data dall'aperto totale e dalla identità, abbiamo il concetto di funzione C^∞ su V.

Ciò pone in maniera naturale il seguente punto di vista: su V pensata come varietà topologica si può istituire il concetto di funzione a valori reali. Si ha cosí $C(V)$, l'algebra delle funzioni reali definite su V. La struttura differenziabile determina le funzioni di $C(V)$ che dobbiamo ritenere «differenziabili». Il concetto di varietà differenziabile appare quindi come quello di una struttura ove abbia senso istituire un calcolo differenziale per le funzioni sopra definite [cfr. Chern 1959, p. 35].

Per definire il concetto di curva tracciata sulla varietà non vi è alcuna difficoltà. Su un aperto U_j, la funzione f_j permette di definire delle coordinate locali, diciamole u^i. Se ora queste coordinate locali vengono pensate come funzioni di un parametro t abbiamo una curva tracciata in U_j. Una curva globale della varietà sarà data specificando per ogni U_j una curva ivi tracciata e ponendo opportune condizioni di raccordo. Una volta definito un concetto di curva superficiale consegue anche immediatamente quello di vettore tangente. Si ricordi che per una superficie si era definito il piano tangente come il piano dei vettori tangenti a tutte le curve tracciate. Ciò suggerisce di fare nel modo seguente: se p è un punto della varietà dato per $t = 0$ dai valori $u^1(0), \ldots, u^n(0)$, un vettore tangente in p alla curva assegnata è dato da $\dot{u}^1(0), \ldots, \dot{u}^n(0)$. In tal modo si definisce, in p, lo spazio vettoriale tangente, uno spazio che questa volta risulta essere n-dimensionale. La presenza di due o piú sistemi di coordinate nello stesso punto ha per conseguenza il fatto che lo spazio tangente viene mutato in sé da una sostituzione lineare data dallo jacobiano di un sistema rispetto all'altro.

Per ogni punto p della varietà V abbiamo dunque uno spazio tangente, che indicheremo con $T(V)_p$. Per descrivere questa totalità e per porre in evidenza la sua «continuità» è opportuno introdurre il concetto di fibrato tangente, il quale

appare meglio descritto come specificazione del concetto piú generale di fibrato vettoriale.

È conveniente, per dare la definizione in modo semplice, considerare prima il caso particolare del fibrato banale. Esso è dato nel modo seguente: Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Il fibrato vettoriale banale n-dimensionale è dato dalla terna $(p, X \times \mathbf{R}^n, X)$ ove p è la proiezione dal prodotto sul primo fattore, ossia $p(x; x_1, \ldots, x_n) = x$.

Per ogni punto x della «base» X, è definito uno spazio vettoriale $p^{-1}(x)$, dato da tutte le $n+1$-uple $(x; x_1, \ldots, x_n)$ con x fissato. Le operazioni sono naturalmente

$$(x; x_1, \ldots, x_n) + (x; y_1, \ldots, y_n) = (x; x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x; x_1, \ldots, x_n) = (x; \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Si ha dunque una collezione di spazi vettoriali, variabile al variare di x in X. Il concetto di fibrato vettoriale può pensarsi ora come un modo di assegnare una «variazione continua» dello spazio vettoriale indicato dagli elementi x, mantenendo tuttavia «localmente» la stessa struttura. Formalmente un fibrato vettoriale di dimensione n è una terna (π, E, B) ove E, B sono spazi topologici di Hausdorff e $\pi : E \to B$ è un'applicazione continua e suriettiva tale che per ogni $b \in B$ $\pi^{-1}(b) = F_b$ è omeomorfo ad $\mathbf{R}^n$. Si ha poi:

I) Su ogni «fibra» F_b si ha una struttura di spazio vettoriale n-dimensionale su $\mathbf{R}$, ed inoltre le due operazioni di somma e di prodotto esterno sono continue nella topologia di E.

II) Per ogni $b \in B$ esiste un intorno U di b in modo tale che $(\pi/\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U), U)$ sia isomorfo al fibrato vettoriale n-dimensionale banale su U (naturalmente occorre una definizione di isomorfismo tra fibrati, ma questa è totalmente implicita nella definizione).

Se ora consideriamo una varietà differenziabile V, per ogni punto p è definito lo spazio vettoriale tangente $T(V)_p$. Possiamo pensare che tale spazio costituisca la fibra di un fibrato, appunto il fibrato tangente. Occorrerà naturalmente definire una topologia sulla totalità delle fibre $T(V)_p$. In termini intuitivi ciò significa specificare quando due vettori tangenti vengono ritenuti «vicini». Ma questo è molto facile: occorre intanto che siano vicini i punti di applicazione. Se p e p' sono ora due punti di applicazione «vicini», sarà possibile scegliere le coordinate in modo che due vettori tangenti in p e p' siano dati rispettivamente da:

$$a'_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \ldots + a'_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

$$a''_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \ldots + a''_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

e si chiederà ora ulteriormente che le due n-uple $(a'_1, \ldots, a'_n)$ e $(a''_1, \ldots, a''_n)$ siano «vicine» nell'ordinario senso euclideo.

Abbiamo dunque il fibrato vettoriale tangente $(\pi, T(V), V)$ ove la π è defi-

nita, naturalmente, dall'assegnare ad un vettore di $T(V)_p$ il punto di applicazione, cioè p.

Mediante il concetto di fibrato tangente è ora possibile specificare il concetto di «campo continuo di vettori tangenti». Piú in generale si può dare per un fibrato qualsiasi (π, E, B) la seguente

DEFINIZIONE. *Un'applicazione continua $f: B \to E$ è detta sezione se $\pi \circ f = 1_B$.*

Il concetto di sezione si rivela di grande utilità per indagare la struttura dei fibrati. Se $\xi = (\pi, E, B)$ è un dato fibrato, le sue sezioni $S(\xi)$ costituiscono in generale un modulo proiettivo sull'anello delle funzioni continue definite su B. Si può mostrare (con opportune ipotesi su B) che tale modulo è libero se e solo se il fibrato è banale.

Nel caso del fibrato tangente, una sezione equivale esattamente ad assegnare per ogni punto p un vettore di $T(V)_p$ variabile con continuità con le specificate topologie di V e di $T(V)$. Una sezione del fibrato tangente è dunque un esplicato completamente adeguato del concetto di campo continuo di vettori.

Un problema importante – anche per il suo significato fisico, si può pensare ad esempio che un vettore tangente rappresenti la velocità di un fluido che scorre sulla varietà – è quello di determinare un campo continuo di vettori mai nullo. Si può mostrare, ad esempio [cfr. Steenrod 1951, p. 141], che se si considera una sfera S^2, non è possibile definire una sezione mai nulla, mentre invece ciò è possibile per la superficie torica. Quest'ultimo fatto può spiegarsi in maniera molto semplice (oltre che con il teorema dell'indice di Poincaré) osservando come il fibrato tangente alla superficie torica sia banale.

Lo studio del fibrato tangente, della possibilità o meno di definire sezioni mai nulle, ecc. è dunque intimamente collegato alla struttura topologica della varietà.

Come abbiamo già osservato, su una varietà differenziabile non è possibile parlare di lunghezze ed angoli. La considerazione di queste quantità dipende dall'assegnazione di una metrica riemanniana [sulla possibilità di assegnare una tale metrica per una varietà differenziabile cfr. Steenrod 1951, p. 58]. In un sistema di coordinate locali si assegna l'elemento lineare $ds^2 = g_{ik}\, du^i\, du^k$ badando naturalmente che questa lunghezza sia invariante per ogni sistema di coordinate (il che ancora equivale a stabilire una sezione di un opportuno fibrato). La condizione da porsi passando dalle coordinate u alle coordinate $\bar{u}$, è

$$g_{ik} = g_{lm} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}_i} \frac{\partial u^m}{\partial \bar{u}_k},$$

cioè le g_{ik} costituiscono un tensore della varietà.

La lunghezza di una curva è ora definibile con

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^i}{dt} \right)^{1/2} dt$$

e si dimostra la invarianza rispetto alle coordinate scelte.

In modo analogo si procede poi per introdurre i concetti di angolo, di curvatura, ecc. Pensiamo che ormai l'idea sia sufficientemente chiara e non occorra proseguire con gli sviluppi tecnici.

Vogliamo illustrare con un ultimo esempio come la curvatura gaussiana, introdotta originariamente facendo riferimento all'immersione, e rivelatasi poi invariante per isometrie, abbia in sé anche un importante significato topologico.

Per questo occorre fare cenno ad una tecnica importante per trattare le varietà topologiche, la triangolazione. Il nome fa evidentemente riferimento alle superfici, e significa la possibilità di costruire una superficie mediante triangoli, opportunamente accostati ponendo i lati in contiguità. Nel caso di varietà di dimensioni maggiori si tratterà di poliedri, iperpoliedri, ecc.

Per una varietà topologica di dimensione arbitraria non è ancora noto se è sempre possibile «triangolarla», tuttavia ciò è possibile per una superficie, e ciò spiega in parte la maggiore semplicità della trattazione della teoria delle superfici.

Nel caso delle varietà differenziabili, tuttavia, non si hanno problemi, poiché è stato dimostrato da Whitehead come ogni varietà differenziabile sia triangolabile.

In particolare per una superficie si può considerare una triangolazione effettuata mediante triangoli geodetici.

Immaginiamo comunque, in generale, di avere una superficie chiusa, ossia triangolabile mediante un numero finito di triangoli. Ad essa è possibile assegnare un invariante topologico: la caratteristica di Eulero-Poincaré. Indicando la superficie con S e la caratteristica di Eulero con $\chi(S)$, si ha

$$\chi(S) = F - E + V$$

ove F, E, V rappresentano rispettivamente il numero delle facce, dei lati e dei vertici di una triangolazione arbitraria. Sottolineiamo il fatto che tale numero non dipende dalla triangolazione ed è pure invariante per deformazioni continue delle superfici. Non solo, vale anche il notevole

TEOREMA. *Due superfici chiuse che abbiano la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré, che siano entrambe orientabili oppure non orientabili, sono omeomorfe.*

La caratteristica di Eulero è dunque una condizione *sufficiente* per fissare la struttura topologica di una superficie [cfr. Aleksandrov 1947, trad. it. p. 141].

Tornando ora al caso che c'interessa, immaginiamo di avere una superficie chiusa sulla quale è data una triangolazione effettuata mediante triangoli geodetici. Applicando la formula di Gauss-Bonnet, si ha:

$$\iint_S K\, dA = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\, \chi(S).$$

La curvatura gaussiana dà quindi origine ad un invariante topologico!

È molto interessante ripercorrere la strada che ha condotto a questo risultato. La curvatura gaussiana è stata introdotta studiando nello spazio euclideo «quanto» una superficie differisse da una sfera. S'è poi visto come questa quantità non dipendesse dalla «forma» della superficie, come fosse invariante per deforma-

zioni della superficie lascianti inalterate le lunghezze delle curve tracciate. Ora, con quest'ultimo risultato abbiamo, a partire da K, un invariante non solo isometrico, ma addirittura topologico. Il pieno significato di tale invariante compare tuttavia quando esso viene presentato come classe di Chern. [M. G.].

Aleksandrov, P. S.
1947 *Kombinatornaja topologija*, OGIZ, Moskva-Leningrad (trad. it. Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino 1957).

Chern, S. S.
1959 *Differentiable Manifolds*, Institudo de Física y Matemática, Universidad de Recife, Recife.

Gauss, C. F.
1828 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Dieterich, Göttingen.

Menger, K.
1948 *Self-dual postulates in projective geometry*, in «American Mathematical Monthly», LV.

Riemann, B.
[1854] *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen...*, Dieterich, Göttingen 1867 (trad. it. in A. Einstein, *Relatività. Esposizione divulgativa*, Boringhieri, Torino 1967, pp. 204-20).

Segre, C.
1889 *C. G. C. v. Staudt ed i suoi lavori*, prefazione alla traduzione italiana di Staudt 1847.

Staudt, C. G. C. von
1847 *Geometrie der Lage*, Korn, Nürnberg (trad. it. Bocca, Torino 1889).

Steenrod, N.
1951 *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Curve e superfici sono gli elementi fondamentali della geometria (cfr. **geometria/topologia**) e sono considerate secòndo il punto di vista proiettivo (cfr. **disegno/progetto, visione**), algebrico (cfr. **razionale/algebrico/trascendente, strutture matematiche**) e **differenziale** (cfr. anche **infinitesimale**). Si esamina, con il ricorso o meno a coordinate (cfr. **sistemi di riferimento**), ciò che rimane **invariante** secondo le trasformazioni specifiche della situazione che si considera (cfr. **applicazioni**), ponendo in rilievo l'opposizione dei concetti **locale/globale** e il ruolo della continuità (cfr. **continuo/discreto**). I legami profondi con la teoria delle **funzioni** sono mostrati dalle superfici di Riemann, mentre il punto di vista differenziale si collega con la teoria della **relatività**. Per gli sviluppi della geometria proiettiva finita cfr. **combinatoria**.

Geometria e topologia

1. *Introduzione.*

«Il metodo per non sbagliare è ricercato da tutti. I logici pretendono di condurvi, ma solo i geometri vi arrivano, e, al di fuori della loro scienza e di ciò che la imita, non vi sono vere dimostrazioni». La geometria cui si riferisce questa affermazione di Pascal [1656, ed. 1963 p. 358] è quella della grande tradizione greca di Pitagora, Euclide ed Archimede. Pur senza ripercorrere le tappe dello sviluppo e della fortuna della geometria greca, è però importante metterne in evidenza i due aspetti sempre presenti fin dai tempi piú antichi: teoretico e tecnico-pratico. Il primo è legato sia alla teoria dei numeri (Pitagora) sia alle esigenze di rigore presenti tanto nella costruzione logico-deduttiva di Euclide (i cui *Elementi* per venti secoli hanno costituito il modello insuperabile), quanto nell'opera di Archimede in cui esse si uniscono ad una grande intuizione per ottenere profondi risultati (che verranno veramente compresi quasi duemila anni piú tardi con l'introduzione del calcolo infinitesimale). L'aspetto tecnico-pratico è sottolineato dall'uso della geometria per la costruzione di modelli qualitativi (nel sistema astronomico tolemaico per esempio) e dall'interesse applicativo essenziale in Archimede, coltivato dalla scuola alessandrina di Ctesibio e di Erone e sempre presente nella società romana. Basti ricordare a questo proposito che i *mensores*, ai quali erano affidati compiti sia civili sia militari (calcolo delle imposte agrarie, misurazione dei beni demaniali, costruzione degli accampamenti, divisione delle colonie, ecc.), ricoprirono cariche importanti nella burocrazia imperiale; il piú famoso, Sesto Giulio Frontino, fu anche detto «geometricae artis inspector providissimus». Per i *mensores* furono istituite in tutto l'impero numerose scuole, e nei testi da loro usati furono introdotti lunghi estratti geometrici, tanto che geometria ed agrimensura rimasero unite in tutta la tradizione manoscritta medievale, e traccia di tale unione si trova ancora nel doppio significato di geometra in italiano (e di *géomètre* in francese).

Senza dubbio le applicazioni alla meccanica furono alla base dello sviluppo della geometria degli indivisibili di Galileo e soprattutto di Bonaventura Cavalieri – che reinventa il metodo di Archimede per la misura delle aree – e di Torricelli, molte delle cui ricerche rimasero purtroppo inedite. Proprio tali problematiche e l'introduzione della geometria analitica di Descartes inaugurarono un periodo fecondissimo per la ricerca matematica alla quale rimase però sostanzialmente estranea la geometria euclidea che, forse per la perfezione nell'ordinamento logico-deduttivo, finí per essere una scienza eminentemente statica, senza crisi ma anche senza sviluppi veramente innovatori, fino alla metà del secolo scorso quando la crisi dei fondamenti e l'introduzione delle geometrie non-euclidee (cfr. § 2) aprirono nuovi orizzonti alle ricerche geometriche.

Molto schematicamente si possono individuare due linee nello sviluppo della geometria dopo la crisi dei fondamenti: algebrica e differenziale-topologica.

La geometria algebrica moderna (cfr. §§ 3 e 6) per molti aspetti notevoli nasce con Riemann. Dalla teoria degli integrali abeliani, alla scoperta della superficie di Riemann associata ad una curva, fino alla prima definizione di equivalenza birazionale di due superfici di Riemann quando abbiano lo stesso corpo delle funzioni razionali, Riemann pone le basi per lo studio delle proprietà geometriche che non siano soltanto invarianti per trasformazioni proiettive (come nella geometria precedente) ma anche per tipi di trasformazioni piú generali. In nuce vi si trova già quello che diventerà uno dei problemi dominanti della geometria algebrica (e piú in generale di quasi tutta la geometria): la classificazione. Questa problematica si farà piú chiara dopo il programma di Erlangen di Klein (§ 2.3). Lo sviluppo della geometria algebrica (cfr. § 6) sarà caratterizzato dall'opposizione intuizione/rigore: la grande scuola italiana (Cremona, Bertini, Corrado Segre, Fano, Castelnuovo, Enriques, Severi...) ha una concezione del rigore completamente diversa da quella degli «algebrizzatori» (Hilbert, Zariski, Weil, Serre, Grothendieck...)

Lo studio delle traiettorie percorse dai punti materiali in movimento e il problema della rappresentazione cartografica della superficie terrestre possono essere affrontati in modo rigoroso solo con lo sviluppo del calcolo infinitesimale; sono le proprietà locali delle curve e superfici a costituire l'oggetto principale di studio della geometria differenziale (cfr. § 5) fino alla metà del secolo XIX quando Riemann introduce le varietà in generale, che non sono sottoinsiemi dello spazio euclideo, e forniscono modelli per la geometria non-euclidea (cfr. § 2.2). In Riemann peraltro gli aspetti differenziale, algebrico e topologico sono strettamente connessi: i possibili prolungamenti analitici di una serie di potenze convergente si congiungono l'uno con l'altro per formare una funzione a un solo valore definita sulla superficie di Riemann che esprime pertanto la natura globale del processo locale di prolungamento analitico. Un altro impulso fondamentale allo sviluppo della geometria differenziale e piú in generale della topologia (cfr. § 4) viene da Poincaré che affronta in modo completamente originale il problema della stabilità del sistema solare esaminando il comportamento globale delle traiettorie di un sistema dinamico (cfr. § 7).

Proprio per dare delle basi matematiche solide alle intuizioni di Riemann, Poincaré introduce, in una serie di ricerche sull'*analysis situs*, alcuni degli strumenti fondamentali della topologia algebrica e della topologia differenziale. «Tali discipline si sono dapprima sviluppate abbastanza lentamente, e solo a partire dal 1930 esse hanno avuto un grande slancio, moltiplicando, diversificando, raffinando i propri metodi ed invadendo progressivamente tutte le altre parti della matematica, senza che si possa ancora distinguere il ben che minimo rallentamento in questa marcia conquistatrice» [Dieudonné 1977, p. 1]. Anche in quest'ambito uno dei problemi fondamentali è quello di classificare gli spazi topologici associando ad essi opportuni invarianti (che possono essere numeri, gruppi, anelli, ecc.) in modo che due spazi siano omeomorfi solo se hanno gli stessi invarianti: tale classificazione pare però attualmente irraggiungibile tranne che in pochi casi particolarmente fortunati.

In realtà le due linee dello sviluppo della geometria precedentemente deli-

neate sono assai intrecciate, poiché ad esempio gli strumenti topologici sono essenziali nello sviluppo della geometria algebrica moderna (cfr. § 6.2) e gli strumenti algebrici sono essenziali in tutta la matematica, cosicché ogni divisione rigida fra i due aspetti della geometria sarebbe completamente erronea. Se una divisione si vuole tentare, questa potrebbe eventualmente effettuarsi ricercando l'origine delle diverse problematiche; in questo senso si può dire che, dopo lo scossone di Riemann, la problematica della geometria algebrica ha piuttosto origini interne alla disciplina stessa o a qualche altro ramo della matematica (ad esempio la teoria dei numeri). Diversa è la situazione per la geometria differenziale che con Poincaré (ma in realtà già in precedenza con la *Mécanique Analytique* (1811) di Lagrange) e successivamente con Elie Cartan (*Leçons sur les invariants intégraux*, 1922) risulta essere l'ambiente naturale in cui si situano i fondamenti della meccanica analitica. La geometria differenziale è quindi diventata uno strumento fondamentale nello studio dei sistemi dinamici che hanno a loro volta stimolato lo sviluppo di sempre nuove problematiche con un rapporto teoria/applicazioni assai fecondo (si pensi ad esempio alla stabilità strutturale ed alla teoria delle catastrofi).

La complessità e l'attualità degli argomenti che saranno affrontati, pur cercando una mediazione fra esposizione analitica ultraspecialistica e generico richiamo sintetico, richiede strumenti delicati; per tale motivo le tematiche generali svolte nei precedenti articoli di carattere matematico di questa *Enciclopedia* costituiranno un costante termine di riferimento.

Va infine sottolineato come la grande varietà e ricchezza della geometria e della topologia abbiano reso necessaria una scelta che ha sacrificato problematiche classiche e ricerche moderne il cui elenco sarebbe lungo quasi quanto questo stesso articolo.

2. *Dalla geometria non-euclidea al programma di Erlangen.*

2.1. Il metodo delle coordinate e la geometria proiettiva.

Fino alla metà del Seicento i progressi della geometria, rispetto agli *Elementi* di Euclide, sono piuttosto scarsi: il settore in cui si è avuta una certa evoluzione è quello applicativo, per merito dei grandi artisti del Rinascimento. Le regole da essi ottenute mediante acute meditazioni su fatti geometrici hanno portato alla conoscenza sistematica della rappresentazione delle figure solide e concorso alla fioritura di uno dei periodi piú fecondi per l'arte.

Sarà tuttavia molto piú tardi, attraverso l'opera di Monge, *Géométrie descriptive* (1795), che verrà codificato in una teoria scientifica tutto quel complesso di regole, indispensabili anche oggi sia per la tecnica sia per l'insegnamento della geometria elementare, e che permettono di rappresentare con disegni le figure dello spazio e, viceversa, di ricostruire dai disegni le proprietà fondamentali delle figure stesse.

Pur senza riproporre questo aspetto importante dell'applicazione della geometria, per cui si rinvia all'articolo «Disegno/progetto» di questa stessa *Enciclopedia*, si può dire che è la geometria proiettiva che fornisce il fondamento teorico ai vari metodi di rappresentazione della geometria descrittiva.

Si deve inoltre tenere presente che, molto prima dell'avvento della geometria descrittiva, nella prima metà del Seicento, per opera soprattutto di Descartes e di Fermat, ha inizio la geometria analitica: la geometria non è piú soltanto la scienza delle figure con le loro proprietà, in cui i numeri intervengono semplicemente come misure di grandezze, ma gli stessi oggetti di cui si occupa la geometria sono rappresentabili mediante numeri ed equazioni e le proprietà delle figure, le loro posizioni, si leggono con procedimenti di calcolo.

La possibilità che ne consegue di utilizzare i metodi dell'algebra e dell'analisi è a fondamento del rapido ed imponente sviluppo della geometria algebrica e della geometria differenziale: tale sviluppo avrà come sbocco finale la crisi del modello della geometria euclidea verso la metà dell'Ottocento e quindi un modo diverso di concepire la geometria stessa, che è alla base della geometria moderna.

Mentre dopo Riemann prevale l'aspetto analitico della geometria rispetto a quello grafico ed intuitivo, c'è un momento in cui i due aspetti sembrano bilanciarsi. È il periodo caratterizzato dallo sviluppo della geometria proiettiva, in cui operano, seguendo l'indirizzo iniziato da Monge, Brianchon e Poncelet, che pubblica per primo nel 1822 un trattato di geometria proiettiva, e quindi Möbius e Plücker, che ne studiano soprattutto le questioni analitiche, mentre Staudt sviluppa gli aspetti sintetici introducendo per via grafica anche le coordinate proiettive e contribuendo «a schiarire le idee sul ruolo sostenuto dagli "scalari" reali o complessi nella geometria classica e ad introdurre in tal modo la concezione delle geometrie su un arbitrario corpo di base» [Bourbaki 1960, trad. it. p. 135].

Gli aspetti analitico e sintetico fanno della geometria proiettiva un modello di teoria difficilmente superabile per semplicità ed eleganza; essa continuerà per molto tempo ad influenzare non solo la ricerca ma anche l'insegnamento della geometria nelle università, soprattutto italiane, sia perché costituisce il primo approccio birazionale alla geometria algebrica, sia anche come base della geometria descrittiva.

Ampliamento improprio. Le operazioni fondamentali nei metodi di rappresentazione sono le operazioni di proiezione e sezione. Nel piano, proiettare un punto P da un punto A vuol dire costruire la retta AP, sezionare una retta p con una retta a vuol dire costruire il loro punto d'intersezione; una situazione piú ricca si ha nello spazio in cui gli elementi che si possono proiettare o sezionare sono punti, rette, piani.

Mentre le operazioni di proiezione sono sempre ben definite, non altrettanto lo sono quelle di sezione, ad esempio nel caso di due rette parallele; è la stessa situazione in cui ci si trova talvolta in aritmetica ove, dopo aver definito un'operazione, si scopre l'impossibilità di definire l'operazione inversa a meno che non si amplii l'insieme numerico su cui si opera: lo stesso criterio vie-

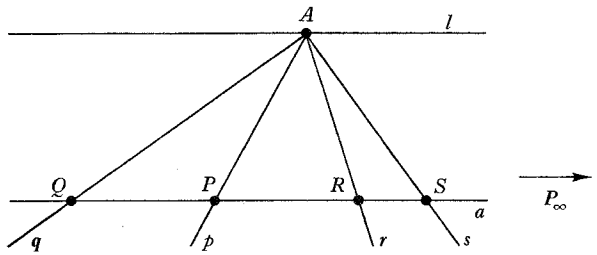


Figura 1.

Corrispondenza biunivoca tra fascio di rette e retta ampliata. Invarianza del birapporto per proiezione e sezione.

ne utilizzato nella geometria mediante l'introduzione degli elementi *impropri*.

Si consideri nel piano la corrispondenza tra i punti di una retta a e le rette del fascio avente come centro il punto A non appartenente ad a che associa ad ogni punto P di a la retta AP (fig. 1); si vede che questa corrispondenza è solo generalmente biunivoca, non essendo definito il punto corrispondente alla retta l per A parallela ad a. La corrispondenza si può tuttavia rendere biunivoca in modo naturale aggiungendo ai punti di a (detti anche punti propri) un punto improprio o all'infinito P_∞ che rappresenta la direzione comune di l ed a e si considera come corrispondente di l.

Pertanto ogni retta possiede un punto improprio comune alle sue parallele; l'insieme r_∞ dei punti impropri del piano si chiama retta impropria sia perché è intersecato da ogni retta in un solo elemento, sia perché r_∞ è l'elemento comune al piano e ad ogni altro piano parallelo; analogamente la totalità dei punti impropri dello spazio prende il nome di piano improprio.

Col termine 'retta' o 'piano' o 'spazio ampliato' s'intende l'insieme degli elementi propri ed impropri di tali enti e per essi si possono enunciare in forma generale le varie proprietà di proiezione e sezione: cosí due punti del piano individuano una retta, due rette del piano individuano un punto.

Rappresentazione analitica. I punti propri di una retta, di un piano, dello spazio, una volta che si sia fissato un sistema di riferimento cartesiano, si rappresentano rispettivamente con un numero reale (x), una coppia di numeri reali (x, y), una terna (x, y, z) (fig. 2); si ottengono cosí la retta affine $\mathbf{A}^1(\mathbf{R})$, il piano affine $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ e lo spazio affine $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$.

Il primo problema che si pone, una volta eseguito l'ampliamento, è quello di dare una rappresentazione che permetta d'individuare con numeri sia gli elementi propri sia quelli impropri.

Nel caso della retta, al punto P di ascissa x nel riferimento cartesiano avente origine O e punto unità U, si associa la coppia di numeri reali (x_0, x_1) con $x_0 \neq 0$ in modo che $x = x_1/x_0$; è chiaro che ad ogni punto P si possono associare più coppie di numeri, fra loro in proporzione; ognuna di tali coppie costituisce le

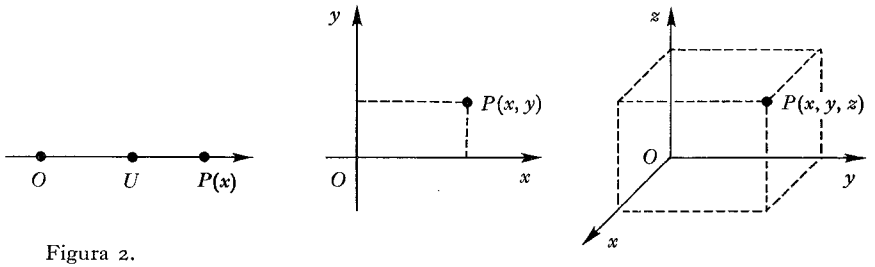


Figura 2.

Sistemi di riferimento e coordinate cartesiane dei punti della retta, del piano e dello spazio.

coordinate omogenee del punto P, mentre x prende il nome di coordinata non omogenea.

Quando P si allontana indefinitamente da O in uno dei due versi della retta, l'ascissa x tende a $\pm\infty$; è ragionevole pertanto assumere come coordinate omogenee del punto all'infinito della retta una coppia del tipo $(0, x_1)$ con $x_1 \neq 0$. Fissato quindi un riferimento cartesiano, i punti della retta ampliata corrispondono biunivocamente alle coppie di numeri reali (x_0, x_1) definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo e con esclusione della coppia $(0, 0)$.

È importante osservare che si presenta la stessa situazione quando si considera un fascio di rette, o di piani, o di circonferenze, ecc.; cosí, se sul piano si considera il fascio individuato dalle due rette di equazioni $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, ogni retta del fascio si scrive $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$ e si ha una corrispondenza biunivoca tra le rette del fascio e le coppie non nulle di numeri reali (λ, μ) definite a meno di un fattore di proporzionalità.

In maniera analoga si possono introdurre le coordinate omogenee per i punti di un piano, associando ad un punto P di coordinate cartesiane (x, y) la terna di numeri reali (x_0, x_1, x_2) per cui:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1}{x_0} \\[2ex] y = \dfrac{x_2}{x_0} \end{cases}$$

(x_0, x_1, x_2) sono le coordinate omogenee del punto P e sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Se si considera la retta del piano passante per il punto P_0 di coordinate non omogenee (a, b) e parallela al vettore di componenti l, m, il punto generico P di tale retta ha coordinate non omogenee: $x = a+lt$, $y = b+mt$ (t parametro) e quindi coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2) tali che

$$x_0 : x_1 : x_2 = 1 : (a+lt) : (b+mt) = \frac{1}{t} : \left(\frac{a}{t}+l\right) : \left(\frac{b}{t}+m\right);$$

quando il punto P si allontana indefinitamente sulla retta (cioè $t \to \pm\infty$) le sue coordinate omogenee tendono ai numeri $(0, l, m)$ con cui si rappresenterà il punto improprio della retta.

Se una retta del piano è rappresentata in coordinate non omogenee dall'equazione cartesiana $u_1x+u_2y+u_0=0$, essa si scrive anche, mediante la sostituzione (1), nella forma omogenea $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$ e (u_0, u_1, u_2) sono le coordinate omogenee della retta; per $u_1=u_2=0$ si ottiene la retta impropria del piano.

Si noti che l'equazione omogenea della retta è simmetrica rispetto alle coordinate di punto e di retta: in questo sta la giustificazione del principio di *dualità* del piano ampliato, per cui, se è vera una certa proprietà $\mathcal{P}$ riguardante punti e rette, è vera anche la proprietà $\mathcal{P}'$ che si ottiene da $\mathcal{P}$ scambiando la parola 'punto' con la parola 'retta'.

Cosí una conica può considerarsi come luogo dei suoi punti oppure come inviluppo delle sue tangenti ed è in ogni caso rappresentata da un'equazione omogenea di secondo grado nelle coordinate di punto o di retta.

Come per il piano, anche i punti dello spazio ampliato si possono rappresentare in coordinate omogenee costituite in questo caso da quaterne di numeri reali (x_0, x_1, x_2, x_3) definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo; i punti impropri sono caratterizzati da $x_0=0$.

La retta, il piano e lo spazio ampliato costituiscono rispettivamente un modello di retta proiettiva reale $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$, di piano proiettivo reale $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, di spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.

Spazi proiettivi. In generale si chiama retta proiettiva reale un insieme X che si può porre in corrispondenza biunivoca con la totalità delle coppie di numeri reali (x_0, x_1) definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo; una tale corrispondenza è individuata dalla scelta di tre elementi distinti di X che costituiscono un riferimento proiettivo. La relazione tra le coppie (x_0, x_1), (x'_0, x'_1) associate ad uno stesso elemento di X da due riferimenti proiettivi è rappresentata da

$$(2) \qquad \begin{cases} x'_0 = ax_0+bx_1 \\ x'_1 = cx_0+dx_1 \end{cases}$$

ove a, b, c, d sono numeri reali definiti a meno di un fattore di proporzionalità e tali che sia non nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

Se invece delle coordinate omogenee (x_0, x_1) si usa l'ascissa proiettiva non omogenea $x=x_1/x_0$, convenendo di associare il simbolo ∞ alla coppia $(0, x_1)$, al posto delle (2), si ha

$$(3) \qquad x' = \frac{c+dx}{a+bx}.$$

La retta ampliata, i fasci di rette, di piani, ecc. sono tutti modelli di retta proiettiva reale.

Agli elementi P, Q, R, S di una retta proiettiva corrispondono, in un fissato riferimento, quattro elementi x, y, z, t della retta reale ampliata col simbolo ∞. Si definisce come birapporto di x, y, z, t il numero

$$(4) \qquad (xyzt) = \frac{(x-z)(y-t)}{(x-t)(y-z)},$$

che è invariante rispetto ai cambiamenti di coordinate proiettive e quindi ha senso definire il birapporto dei quattro elementi P, Q, R, S come: $(PQRS) = (xyzt)$.

Va sottolineato che le equazioni (2) (ovvero la (3)), una volta che si sia fissato un sistema di riferimento sulla retta proiettiva X, stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti di X, in cui si associano punti di coordinate (x_0, x_1) e (x'_0, x'_1) (ovvero x e x'); queste corrispondenze sono dette trasformazioni proiettive e formano un gruppo rispetto alla composizione: il birapporto è un primo esempio d'invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni.

Le stesse equazioni si possono interpretare anche come quelle di una corrispondenza, detta proiettività, tra punti di due rette proiettive X, X', tali che in ognuna di esse si sia fissato un riferimento proiettivo; il birapporto di quattro elementi è invariante per proiettività e quindi per operazioni di proiezione e sezione; con riferimento alla figura 1 si ha: $(PQRS) = (pqrs)$.

I concetti di piano e di spazio proiettivo si possono introdurre in maniera analoga.

Un piano proiettivo reale è un insieme X i cui elementi si possono porre in corrispondenza biunivoca con le terne di numeri reali (x_0, x_1, x_2) definite a meno di un fattore non nullo mediante un riferimento proiettivo che è costituito da quattro elementi di X a tre a tre non allineati, cioè che non verifichino una stessa equazione lineare nelle incognite x_0, x_1, x_2; un cambiamento di riferimento induce un cambiamento tra le coordinate di uno stesso punto, dato da

$$(5) \qquad \begin{cases} x'_0 = a_{00}x_0+a_{01}x_1+a_{02}x_2 \\ x'_1 = a_{10}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{20}x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases}$$

con i coefficienti a_{ij} definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo e tali che $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Formule equivalenti si possono ottenere utilizzando coordinate non omogenee $x=x_1/x_0$, $y=x_2/x_0$, $x'=x'_1/x'_0$, $y'=x'_2/x'_0$. Una trasformazione proiettiva è una corrispondenza tra punti di un piano proiettivo rappresentata da equazioni del tipo (5).

Il piano ampliato, la totalità delle rette o dei piani dello spazio passanti per uno stesso punto sono modelli di piano proiettivo.

Si può definire infine analiticamente uno spazio proiettivo reale di dimensione n qualsiasi, $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, come l'insieme delle $(n+1)$-ple di numeri reali defi-

nite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo; o anche, un punto di $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ è una retta di $\mathbf{R}^{n+1}$ privata dell'origine.

Se si considera la sfera di raggio unitario S^n di $\mathbf{R}^{n+1}$, ad ogni elemento di $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ corrispondono due punti diametralmente opposti di S^n; detti equivalenti due tali punti, $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ si può considerare come lo spazio quoziente di S^n rispetto a questa relazione d'equivalenza; come conseguenza, poiché S^n è compatta, anche $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ è compatto (cfr. § 4.1).

Ampliamento complesso. Ragioni analoghe a quelle che inducono a prolungare il campo dei numeri reali al campo dei numeri complessi sono alla base dell'ampliamento complesso della retta, del piano, dello spazio e in generale di $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$; tale ampliamento si ottiene considerando, oltre ai punti rappresentati da coordinate reali, anche i punti con coordinate complesse, che si dicono punti complessi, il cui insieme si indica con $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$.

Se si fa sia l'ampliamento improprio sia l'ampliamento complesso ad esempio del piano, si ottiene il piano proiettivo complesso $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ costituito dalla totalità delle terne non nulle di numeri complessi (z_0, z_1, z_2) definite a meno di un fattore di proporzionalità complesso; se è possibile scegliere tale fattore in modo da ottenere una terna reale, il punto corrispondente si dice reale e si ha un'inclusione naturale di $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

2.2. Le geometrie non-euclidee.

Gli *Elementi* di Euclide hanno trovato commentatori e critici fino dall'antichità: in particolare il quinto postulato di Euclide, o «postulato delle parallele», che riguarda l'esistenza e l'unicità della retta passante per un punto e parallela a una retta assegnata, aveva suscitato molte perplessità. Ad Euclide stesso doveva essere sembrato meno evidente degli altri postulati, poiché nella sua costruzione cerca di utilizzarlo il piú tardi possibile.

Tuttavia, fino all'inizio dell'Ottocento, nessuno pensava a una geometria in cui non valesse il postulato delle parallele; ma la tendenza dei critici era quella o di sopprimerlo come tale e di farlo dipendere dagli altri postulati o di sostituirlo con affermazioni che si ritenevano piú semplici e piú evidenti.

È emblematica in questo senso l'opera di Gerolamo Saccheri del 1733 dal titolo *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Considerato un quadrangolo piano $ABCD$ con $\hat{A}$, $\hat{B}$ angoli retti e $AD = BC$, prescindendo dal postulato delle parallele si ha che $\hat{C} = \hat{D}$ ed il Saccheri distingue quindi tre casi, considerati all'inizio tutti possibili, che prendono il nome di ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso a seconda che siano tali gli angoli uguali $\hat{C}$, $\hat{D}$.

In corrispondenza alle tre ipotesi viene dimostrato che la somma degli angoli di un triangolo è rispettivamente uguale, minore o maggiore di due retti; cosí i casi ipotizzati dal Saccheri corrispondono a quelle che oggi si dicono, nell'ordine, la geometria euclidea, la geometria iperbolica e la geometria ellittica del piano, secondo la denominazione ad esse attribuita da Klein.

Dopo un lavoro notevole, che costituisce il primo esempio di costruzione rigorosa di una serie di proposizioni indipendenti dal postulato delle parallele, il Saccheri, convinto dell'unicità della geometria euclidea, dimostra erroneamente che sono assurde le altre due ipotesi, mentre invece l'ipotesi dell'angolo acuto non presenta alcuna contraddizione e risulterebbe coerente anche l'ipotesi dell'angolo ottuso qualora si rinunziasse anche al secondo postulato di Euclide, relativo all'infinità della retta.

Bisogna tuttavia attendere il secolo successivo con le opere di Gauss, Lobačevskij e Giovanni Bolyai per vedere la costruzione di geometrie diverse da quella di Euclide.

Si tratta certamente di una rivoluzione nell'ambito della scienza, i cui effetti sembra fossero motivo di preoccupazione persino per Gauss che in una lettera a Bessel del 1829 dichiarava di temere «gli strilli dei beoti» se avesse manifestato completamente le sue idee al riguardo.

Ma, quando entra in crisi il vecchio modello assiomatico-deduttivo, si assiste a uno sviluppo enorme della geometria verso ogni direzione con l'apparizione di problemi e di argomenti di ricerca che ancor oggi mantengono la loro validità.

La geometria diventa una scienza ipotetico-deduttiva, cioè una scienza che pone di volta in volta i suoi principî, preoccupandosi della loro coerenza, e si sviluppa in base ad essi.

Tutto ciò comporta da una parte un problema di classificazione delle geometrie che in tal modo si possono costruire e che trova una risposta nel programma di Erlangen (cfr. § 2.3); dall'altra parte i nuovi principî permettono alla geometria di essere utilizzata sempre piú nei suoi metodi e nei suoi risultati anche in situazioni diverse da quelle dello spazio ordinario, come per gli spazi a piú dimensioni o per lo studio di vari problemi dell'algebra e dell'analisi.

Anche la teoria della relatività di Einstein trova uno dei suoi fondamenti nella geometria non-euclidea.

I modelli di geometrie non-euclidee. La geometria proiettiva costituisce un primo esempio di geometria non-euclidea in quanto in essa perde di significato la nozione di parallelismo: tuttavia è una geometria piuttosto lontana da quella di Euclide e storicamente hanno avuto maggior risalto altri modelli, ottenuti con procedimenti diversi, che rappresentano altrettanti punti di vista da cui si può pervenire a tali geometrie.

Le prime costruzioni riguardano la geometria iperbolica e sono di tipo elementare, analoghe a quelle degli *Elementi* di Euclide, con le dovute modifiche; in questo ambito è notevole la costruzione di Lobačevskij che introduce fra l'altro un tipo di trigonometria iperbolica, analoga alla trigonometria sferica, ma per una sfera di raggio immaginario. Altre importanti costruzioni sono quelle di tipo metrico-proiettivo, dovute a Cayley e Klein, e quelle di tipo differenziale originate dalla memoria di Riemann del 1854 – che segna l'inizio anche della geometria ellittica – e sviluppate da Beltrami.

Per avere un'idea del modello metrico-proiettivo, si consideri una circonferenza Γ del piano; si dirà piano iperbolico l'insieme costituito dai punti interni a Γ, punti propri, e dai punti di Γ, punti impropri, mentre le rette del piano

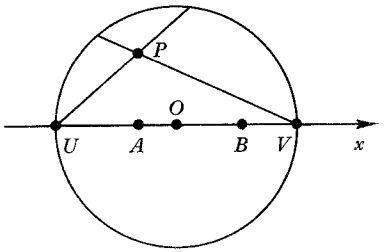


Figura 3.
Modello di piano iperbolico: le rette PU, PV sono parallele alla retta AB; i punti U, V hanno distanza infinita da A, B.

sono le corde della circonferenza. Come distanza proiettiva dei punti A, B si considera il numero $(AB)=c\log(ABUV)$, ove c è una costante reale, U, V le intersezioni della retta AB con Γ. Cosí, se Γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e A, B sono due punti sull'asse x, i punti A, B, U, V hanno ascisse a, b, -1, 1 e dall'espressione del birapporto (4) si ottiene:

$$(AB)=c\log\frac{(a+1)(b-1)}{(a-1)(b+1)}.$$

Se si tiene fisso A e si fa tendere B a V $(b\to 1)$, ovvero si tiene fisso B e si fa tendere A a U $(a\to -1)$, risulta in ogni caso che $\lim(AB)=\infty$, cioè su ogni retta AB i punti U, V sono a distanza infinita da ogni altro punto della retta medesima.

Si può definire in maniera analoga l'angolo fra rette; le rette che uniscono il punto P (fig. 3) con i punti U, V sono da considerarsi parallele ad AB; si ottiene cosí un modello di geometria iperbolica: si perviene allo stesso risultato prendendo una qualsiasi conica non degenere Γ a punti reali, che prende il nome di *assoluto*.

Se invece di una conica a punti reali si considera una conica assoluto Γ non degenere a punti complessi si ottiene, con considerazioni analoghe, un modello di piano ellittico i cui punti sono tutti i punti del piano proiettivo.

I modelli di tipo differenziale di geometrie non-euclidee del piano sono forniti dalle superfici a curvatura gaussiana (cfr. § 5.1) costante, che è l'unico tipo di superficie dotato di un gruppo sufficientemente grande di isometrie, cioè di trasformazioni, analoghe ai movimenti del piano, che sovrappongono la superficie a se stessa, mantenendo inalterate le lunghezze di curve corrispondenti.

Se una superficie M ha curvatura gaussiana K costante, essa si può identificare localmente col piano se $K=0$, con la sfera di raggio $1/\sqrt{K}$ se $K>0$, mentre, se $K<0$, la superficie M si può identificare localmente con una delle superfici di rotazione della figura 4, dette pseudosfere.

Le superfici a curvatura costante forniscono un modello di geometria ellittica, euclidea o iperbolica piana a seconda che $K>0$, $K=0$ o $K<0$; il ruolo

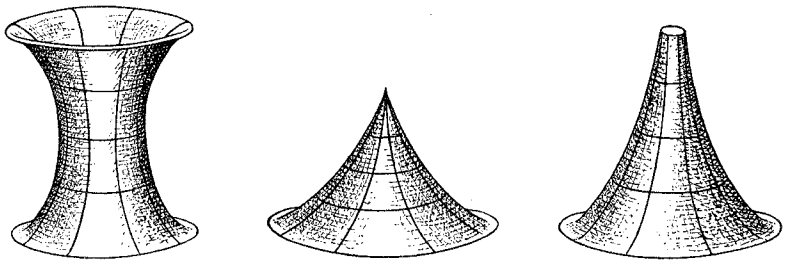


Figura 4.
Modelli di superfici di rotazione con curvatura negativa; i meridiani sono geodetiche.

delle rette è ricoperto dalle geodetiche della superficie (per la sfera sono i cerchi massimi) e questo fatto è in accordo con la relazione, dovuta a Gauss:

$$\int_{ABC} K\,dV=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi,$$

dove ABC è un «triangolo» della superficie M avente per lati tre segmenti geodetici (cfr. anche l'articolo «Curve e superfici» di questa stessa *Enciclopedia*, § 4.4).

2.3. Il programma di Erlangen.

La distinzione tra geometria elementare e geometria proiettiva era già presente nella prima metà dell'Ottocento e costituiva un esempio di classificazione delle geometrie; Cayley, in una memoria del 1859, dà una prima definizione esplicita di una metrica di tipo proiettivo e osserva che «la geometria metrica appare cosí come una parte della geometria proiettiva e la geometria proiettiva è tutta la geometria» [1859, ed. 1889 p. 592].

Nel frattempo si erano venute lentamente affermando le geometrie non-euclidee e la necessità di stabilire un confronto con le altre geometrie si poneva in modo netto; se a tutto questo si aggiunge l'influenza su Klein di Sophus Lie, la cui opera era tutta orientata verso i gruppi di trasformazioni, si ha un quadro sufficientemente chiaro per comprendere la situazione in cui Klein scrive la sua memoria *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [1872], piú nota come programma di Erlangen.

L'elemento essenziale del pensiero di Klein consiste nella presentazione della geometria come una coppia costituita da un insieme di elementi, lo spazio S, e da un gruppo di trasformazioni G di S; le proprietà geometriche dei sottoinsiemi di S sono le proprietà invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni considerato.

Questa semplice idea porta in maniera naturale all'esistenza di diversi tipi

di geometrie e stabilisce una gerarchia fra essi. Resta inoltre chiarito il significato di proprietà di una figura: le proprietà della geometria elementare sono quelle invarianti rispetto al gruppo delle similitudini, che Klein indica come il «gruppo principale»; proprietà proiettive di una figura sono quelle invarianti rispetto alle trasformazioni proiettive e cosí di seguito; inoltre, passando da un gruppo di trasformazioni G a uno piú grande G' che lo contiene, vi sono proprietà che si mantengono e altre che perdono significato.

Esempi. Il gruppo delle trasformazioni proiettive del piano, per le (5), è un gruppo ad otto parametri, essendo i coefficienti a_{ij} definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Proprietà proiettive di elementi del piano sono le proprietà invarianti per queste trasformazioni: sono tali ad esempio il birapporto di quattro elementi di una retta, il concetto di ordine di una curva algebrica, che si esaminerà piú avanti, il concetto di conica non degenere. Dal punto di vista proiettivo due rette distinte hanno un punto in comune e quindi la nozione di parallelismo tra rette non è di tipo proiettivo; in questo ambito inoltre tutte le coniche non degeneri sono equivalenti, cioè trasformabili l'una nell'altra per trasformazione proiettiva, e non vi è alcuna distinzione tra quelle che si chiamano ellisse, parabola, iperbole.

Se si considera il sottogruppo delle trasformazioni proiettive che muta in se stessa una retta, si ottiene il gruppo affine del piano; supposto che la retta fissa abbia l'equazione $x_0=0$, introducendo le coordinate non omogenee $x=x_1/x_0$, $y=x_2/x_0$, $x'=x'_1/x'_0$, $y'=x'_2/x'_0$, le trasformazioni lineari affini del piano sono rappresentate da

$$\begin{cases} x'=a_{10}+a_{11}x+a_{12}y \\ y'=a_{20}+a_{21}x+a_{22}y \end{cases} \qquad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

e costituiscono un gruppo a sei parametri. Si può quindi affermare che le proprietà affini di una figura sono le proprietà proiettive della figura e della retta fissata, che viene usualmente detta retta all'infinito (i suoi elementi sono i punti all'infinito o impropri); sono concetti di tipo affine il parallelismo tra due rette, perché ciò equivale all'avere in comune un punto all'infinito, e la distinzione per le coniche in tipo ellittico, parabolico, iperbolico, perché basata sul comportamento della conica nei confronti della retta all'infinito.

Se invece si considerano le trasformazioni proiettive che lasciano fissa la coppia di punti complessi coniugati $(0, 1, \pm i)$, detti i punti ciclici, si ottiene il gruppo a quattro parametri delle similitudini del piano che, in coordinate non omogenee, sono rappresentate nella forma

$$\begin{cases} x'=a_{10}+h(x\cos\varphi+y\sin\varphi) \\ y'=a_{20}+\varepsilon h(-x\sin\varphi+y\cos\varphi) \end{cases}$$

$(\varepsilon=\pm 1)$ e caratterizzano la geometria euclidea del piano; in particolare, per $h=1$, si ottengono i movimenti del piano. Le proprietà metriche di una figura piana sono le proprietà proiettive della figura e della coppia di punti ciclici: cosí per una conica l'essere una circonferenza equivale al passaggio per i punti ciclici ed è quindi una proprietà metrica, fatto già noto a Poncelet che scriveva: «Circonferenze poste arbitrariamente nel piano non sono del tutto indipendenti, come si potrebbe credere, ma hanno idealmente due punti immaginari comuni all'infinito» [1822, ed. 1865 p. 48].

Infine, si è visto al § 2.2 che i modelli metrico-proiettivi delle geometrie non-euclidee del piano sono caratterizzati da una conica assoluto Γ che è a punti reali per la geometria iperbolica e a punti complessi per quella ellittica; pertanto Γ può essere rappresentata con un'equazione del tipo $x_0^2+\rho(x_1^2+x_2^2)=0$ con $\rho<0$ nel primo caso, $\rho>0$ nel secondo.

I gruppi di trasformazioni delle geometrie non-euclidee relative a questi modelli sono i gruppi a tre parametri di trasformazioni proiettive del piano che mutano Γ in se stessa.

Mediante la dualità del piano, si può associare a Γ una conica inviluppo, costituita dalle rette $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$ tangenti a Γ, e che è rappresentata dall'equazione $\rho u_0^2+u_1^2+u_2^2=0$; per $\rho=0$, tale inviluppo degenera nei punti ciclici – cioè nei fasci di rette per tali punti – che caratterizzano la geometria euclidea. Si può pertanto dire che la geometria non-euclidea «diventa» la geometria euclidea quando l'assoluto Γ degenera come inviluppo nei punti ciclici del piano; il gruppo associato diventa in questo caso un gruppo a quattro parametri.

Importanza dell'opera di Klein. Nell'introduzione della sua memoria Klein con molta modestia dichiara: «Noi non veniamo certo a sviluppare alcuna idea essenzialmente nuova, ma solo delineiamo con chiarezza e precisione ciò che fu già pensato da taluno con piú o meno esattezza. Ma il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto piú giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate, che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre» [1872, trad. it. p. 308].

Tuttavia l'interesse suscitato dal programma di Erlangen dev'essere stato notevole se ben presto venne tradotto sia in italiano sia in francese. Scrive Corrado Segre nella presentazione dell'edizione italiana: «Tante idee generali ed ingegnose che si trovano in queste pagine, come l'identità sostanziale fra varie discipline matematiche (ed in particolare fra discipline analitiche e geometriche!) che si rappresentano l'una sull'altra quando si tenga conto dei gruppi di trasformazioni che in esse si pongono a base; le varie considerazioni su questi gruppi; tante giuste osservazioni che mettono sotto la luce piú vera e precisano nel miglior modo il carattere di vari argomenti e varie dottrine, e specialmente di alcune piú discusse, come quella delle varietà piú volte estese, e la geometria non euclidea: tutte queste son cose o non sufficientemente conosciute e studiate dai giovani, o note solo per via indiretta» [1889, p. 307].

Anche Dieudonné nella prefazione di una riedizione del programma sottolinea l'importanza dell'opera di Klein come «linea di separazione delle acque» ed inizio della geometria moderna.

Infatti da una parte, come si è cercato di illustrare negli esempi, il programma di Erlangen si può considerare come un punto finale della geometria proiettiva e di quelle subordinate ad essa, comprese le geometrie non-euclidee, in quanto chiarisce i rapporti fra le diverse geometrie ed il significato algebrico, come invarianti, delle proprietà degli enti geometrici.

D'altra parte i vari tipi di trasformazioni considerati da Klein, fra cui figurano anche le trasformazioni birazionali ed i gruppi di omeomorfismi, ma soprattutto il ruolo predominante che Klein nella costruzione della geometria attribuisce al gruppo, rispetto allo spazio su cui esso opera, proiettano il programma nella geometria moderna.

Cosí viene esplicitamente introdotto e chiarito con vari esempi il concetto di «isomorfismo» tra geometrie, in relazione ai gruppi di trasformazioni che le caratterizzano. Inoltre lo studio dei rapporti tra un gruppo e lo spazio su cui esso opera contiene dei temi che verranno poi ampiamente sviluppati nella topologia, mediante lo studio dello spazio delle orbite (che Klein chiama corpi) di un gruppo, e nella geometria differenziale, attraverso il concetto di spazio omogeneo, che è un tipo di spazio definito sostanzialmente attraverso un gruppo di trasformazioni.

2.4. Hilbert e la nuova assiomatica.

Il processo di distacco della geometria dall'evidenza intuitiva, iniziato con la costruzione di modelli non-euclidei e reso piú chiaro dalla formulazione del programma di Erlangen, prosegue con incertezze verso la fine dell'Ottocento ad opera soprattutto di Pasch, di Peano, di Veronese (ideatore di una geometria non-archimedea). Ma soltanto con la pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* [1899] di Hilbert l'innovazione diventa esplicita e radicale: la geometria non deve necessariamente descrivere il mondo fisico, né trarre in alcun modo il suo punto di partenza dalla realtà, sia quella visibile o quella ideale. La geometria deve soltanto stabilire un sistema iniziale di assiomi e dedurre da questi le sue proposizioni, in base alle leggi della logica. Gli oggetti di cui essa tratta, cioè punti, rette, piani non devono essere identificati con gli oggetti indicati comunemente con lo stesso nome e corrispondenti ad astrazioni che provengono dallo spazio fisico: essi sono «definiti implicitamente» dagli assiomi e la terminologia geometrica può essere applicata a qualunque sistema di oggetti che soddisfi agli assiomi stessi. Analizzando in modo profondo diverse assiomatiche, Hilbert considera la possibilità di geometrie non soltanto non-euclidee, ma anche non-pascaliane, non-desarguesiane, non-archimedee; non gl'interessa stabilire una qualche «verità» per i suoi assiomi, se non quella di carattere logico che consiste nel provare che non comportano contraddizioni. Hilbert ha poi la consapevolezza del fatto che gli assiomi descrivono enti realmente esistenti, se non sono contraddittori; e ci possono essere sistemi di enti aventi le nature piú diverse che soddisfano a uno stesso gruppo di assiomi; sicché si può affermare che un'assiomatica è un'intelaiatura di carattere logico applicabile in infinite situazioni diverse. Questo punto di vista, fortemente avversato ai primi del Novecento (si vedano le aspre polemiche con Frege), è in realtà estremamente moderno: basti pensare al ruolo dell'assiomatica negli *Eléments de mathématiques* di Nicolas Bourbaki.

Fino ai nostri giorni si manifesta in modo decisivo l'influenza di Hilbert: la cosiddetta geometria elementare, che ha origine negli *Elementi* di Euclide, è ancor oggi basata sulla trattazione hilbertiana.

Accanto all'interesse logico, e a questo strettamente connesso, si nota in Hilbert un forte interesse aritmetico-algebrico, che completa in certo senso il programma di Descartes: il suo modello di geometria euclidea viene infatti costruito algebricamente, a partire dall'insieme dei numeri interi tramite le sole operazioni di somma, differenza, prodotto, quoziente e radice quadrata, in modo da evitare, nel presentare la geometria analitica, qualsiasi ricorso all'intuizione spaziale. Analogamente propone un modello di geometria non-archimedea sopra un corpo base ottenuto dagli interi con le precedenti operazioni e l'aggiunta di una variabile; sicché la geometria archimedea e non-archimedea vengono trattate in modo del tutto parallelo e vengono ad avere lo stesso grado di verità. È dunque costante in Hilbert il ricorso, per garantirsi da contraddizioni, a fatti elementari riguardanti campi numerici di semplice costruzione a partire dagli interi, anziché all'intuizione spaziale, che vuole anzi bandire.

L'accostamento ritorno ai fondamenti - ritorno all'algebra è quello stesso che si ritrova quarant'anni piú tardi in Zariski quando si proporrà di dare salde basi alla geometria algebrica. Non è un caso che anche nel settore della geometria algebrica i contributi notevolissimi di Hilbert abbiano tutti carattere algebrico, dal teorema delle sizigie, al *Nullstellensatz*, al teorema della base finita.

La geometria (e la matematica) moderne sono dunque debitrici a Hilbert, oltreché di notevoli risultati in numerosi settori, anche e soprattutto della nuova impostazione, attenta ai fondamenti e al rigore, che Hilbert riesce a trovare nell'aritmetica e nell'algebra, dove il ricorso all'intuizione è minimo e ha carattere generalmente elementare.

La grandezza di Hilbert però sta nella sua capacità di non limitarsi al solo aspetto logico-formale per cogliere invece l'essenza dei problemi geometrici anche dai loro aspetti intuitivi (come risulta ad esempio da Hilbert e Cohn-Vossen [1932]).

3. *Introduzione elementare alla geometria algebrica.*

3.1. Le coniche.

«La geometria algebrica è senza dubbio la parte della matematica in cui è massimo lo scarto tra le idee intuitive che ne formano il punto di partenza e i concetti astratti e complessi che sono alla base delle ricerche moderne». Cosí inizia l'introduzione al *Cours de géométrie algébrique* [1974, p. 5] di Jean Dieudonné, il cui punto di vista può essere largamente condiviso. Gli oggetti della

geometria algebrica, cioè le curve e le superfici algebriche, piú generalmente le varietà algebriche di dimensione qualsiasi che godono di proprietà riposte ed elevate, comprendono infatti alcune curve particolarmente semplici che sono state oggetto di studio fin dall'antichità sia per il loro interesse teorico sia per le loro immediate applicazioni ai vari settori della scienza.

Tali sono la circonferenza, l'ellisse, l'iperbole e la parabola che soddisfano a proprietà metriche elementari (legate cioè alla nozione di distanza): ad esempio l'ellisse è il luogo dei punti la somma delle distanze dei quali da due punti fissi (fuochi) è costante, ecc. Assieme alle caratteristiche geometriche che differenziano tali tipi di curve, ve ne sono altre che risultano invece comuni a tutte le curve suddette; la piú notevole (nota fin dall'antichità, ad esempio ad Apollonio) è questa: tali curve si possono tutte ottenere come sezioni di un cono circolare retto con un piano, donde la loro denominazione di coniche (o sezioni coniche: cfr. fig. 5). Se il piano è perpendicolare all'asse del cono si ha una circonferenza, che diventa un'ellisse spostando leggermente il piano; se il piano è parallelo a una generatrice del cono si ottiene invece una parabola, che diventa un'iperbole quando il piano taglia tutte e due le falde del cono. Se poi il piano passa per il vertice del cono, esso lo taglia in una «conica degenere» costituita da una coppia di rette distinte o coincidenti oppure da un solo punto (il vertice).

Il metodo delle coordinate cartesiane permette di determinare altre proprietà comuni alle coniche oppure atte a differenziarle, consentendo altresí di scoprirne qualcuna meno evidente all'intuizione. Fissato nel piano un sistema di coordinate di assi x e y e origine O, si vede facilmente che le equazioni che seguono rappresentano le varie specie di coniche prima considerate:

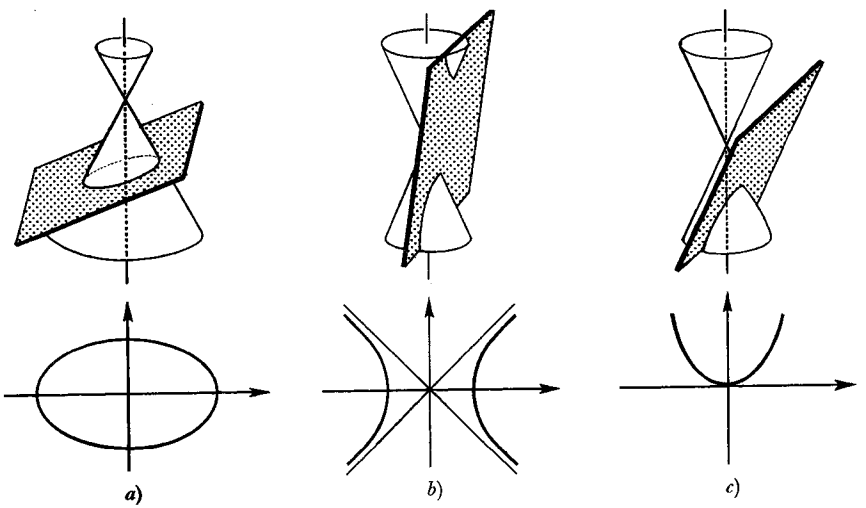


Figura 5.
Sezioni coniche: *a*) ellisse; *b*) iperbole; *c*) parabola.

$y-x^2=0$	è una parabola
$x^2+4y^2-1=0$	è un'ellisse
$x^2-y^2-1=0$	è un'iperbole
$x^2-y^2=0$	è una coppia di rette distinte
$x^2=0$	è una coppia di rette coincidenti
$x^2+y^2=0$	è un solo punto (l'origine O).

Osservando che tutte le equazioni ora scritte sono algebriche (ossia espresse da polinomi) di secondo grado nelle variabili x, y, si è condotti piú generalmente a considerare il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano a un'equazione algebrica di secondo grado:

$$f(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

dove gli elementi a_{ij} sono numeri reali tali che a_{11}, a_{12}, a_{22} non sono tutti nulli. Definendo conica tale insieme di punti si ottengono tutte le sezioni coniche precedentemente considerate nonché I) le coppie di rette parallele (ad esempio con l'equazione $x(x-1)=0$); II) l'insieme vuoto (conica priva di punti reali, ad esempio con l'equazione $x^2+y^2+1=0$).

Per comprendere meglio la natura delle situazioni eccezionali I) e II) indicate sopra si possono fare queste considerazioni. Una coppia di rette parallele, anche se non può mai ottenersi come sezione di un cono, può però essere riguardata come sezione piana di un cilindro con un piano parallelo all'asse. Ora, un cilindro è una superficie costituita da rette fra loro parallele, aventi dunque la stessa direzione o – come si è visto nel § 2.1 – un punto comune all'infinito (punto improprio); esso può dunque riguardarsi come un cono particolare col vertice improprio e quindi le coniche del tipo I) possono rientrare, sia pure come caso limite, tra le sezioni coniche.

Inoltre, considerando punti della conica (1) anche i punti a coordinate complesse, il luogo associato a un'equazione del tipo II) non è piú un insieme vuoto, ma può essere riguardato come un'«ellisse immaginaria». Anche la conica di equazione $x^2+y^2=0$ non è piú costituita da un solo punto, bensí dalle due rette a coefficienti complessi (rette immaginarie coniugate) $x+iy=0$, $x-iy=0$.

Quest'ultima considerazione potrebbe suggerire un'ulteriore generalizzazione della definizione di conica, consentendo ai coefficienti dell'equazione (1) di variare nel campo complesso. In tal modo si dovrebbe riesaminare la classificazione delle coniche (ellissi, iperbole, parabole, ecc.) indicata prima, anche se con questo vantaggio: la conica $x^2+y^2=0$, che nel piano complesso è costituita da due rette distinte, sarebbe definita dal polinomio riducibile $(x+iy)(x-iy)$ e non da un polinomio irriducibile quale è x^2+y^2 nel campo reale. Si manterrà comunque la definizione (1) di conica a coefficienti reali riservandosi di immergerla nel piano affine complesso oppure nel piano proiettivo reale o complesso (considerando in tal caso anche i punti impropri).

Ecco ora alcune proprietà algebriche elementari delle coniche; le prime sono

strettamente legate al fatto che l'equazione (1) è di secondo grado, mentre le altre si prestano a generalizzazioni alle curve algebriche piane associate a polinomi $f(x, y)$ di grado qualsiasi.

a) Se la conica è una parabola, oppure un'ellisse (reale o immaginaria), o un'iperbole, o anche un punto reale, il polinomio $f(x, y)$ di secondo grado che la definisce è nel campo reale irriducibile, cioè non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali di primo grado; viceversa, se la conica è riducibile (o degenere) in due rette reali (distinte o coincidenti), il polinomio $f(x, y)$ è riducibile.

b) Il determinante dei coefficienti, cioè il numero

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{23}^2 - a_{33}a_{12}^2$$

è uguale a 0 se e soltanto se la conica è riducibile in due rette reali o è un punto (due rette nel campo complesso).

c) Per ogni punto P di un'ellisse, parabola o iperbole passa una retta tangente alla conica; si suol dire che la tangente ha due intersezioni con la conica riunite in P. Ad esempio, la retta $y = 0$ è la tangente nell'origine alla parabola $y - x^2 = 0$; le intersezioni della retta con la parabola si calcolano risolvendo il sistema $y - x^2 = y = 0$ che si riduce a $y = x^2 = 0$ e l'ultima uguaglianza, con la presenza del quadrato, indica che la soluzione $x = y = 0$ va contata due volte in accordo col fatto geometrico. Si suol dire anche che la retta $y = 0$ ha molteplicità d'intersezione 2 con la parabola nell'origine.

d) Si consideri ora una conica spezzata in due rette distinte; se P è un suo punto, la tangente alla conica in P coincide con la retta su cui è situato P, con questa eccezione: se P coincide con il punto Q comune alle due rette che costituiscono la conica, non esiste una retta tangente alla conica in Q; si può invece dire che esistono in Q due rette tangenti alla conica, cioè le due rette nelle quali la conica è spezzata. Si può notare che ogni retta passante per Q ha due intersezioni con la conica (ad esempio la retta $y = 2x$ ha due intersezioni nell'origine con la conica $xy = 0$, spezzata nei due assi cartesiani). Si dice allora che Q è un punto doppio per la conica.

e) Ellisse, parabola, iperbole non hanno lo stesso comportamento, nel piano reale, rispetto alle intersezioni con una retta. Una retta non tangente a un'ellisse la incontra sempre in due punti oppure non la interseca affatto. Invece una retta parallela all'asse della parabola ha con questa una sola intersezione e lo stesso fatto succede per l'iperbole intersecata da una retta parallela a (ma non coincidente con) uno dei due asintoti; ciò non toglie che vi siano anche rette che incontrano la parabola o l'iperbole in due punti oppure in nessun punto.

Se si considera l'ampliamento proiettivo del piano, le intersezioni di un'iperbole con una retta possono aumentare e comprendere un punto improprio. Si ricordi, come già visto nel § 2.1, che i punti del piano proiettivo reale sono definiti come terne (x_0, x_1, x_2) di numeri reali non tutti nulli, a meno di un fattore non nullo di proporzionalità; l'applicazione $(x, y) \to (1, x, y)$ dà un'immersione

del piano affine nel piano proiettivo, dove un punto improprio è del tipo $(0, x, y)$. L'estensione della conica $f(x, y) = 0$ dal piano affine a quello proiettivo è data dall'equazione $f(x_1/x_0, x_2/x_0) = g(x_0, x_1, x_2)/x_0^2 = 0$, ovvero dall'equazione $g(x_0, x_1, x_2) = 0$, dove $g(x_0, x_1, x_2)$ risulta dunque un polinomio omogeneo di secondo grado tale che $g(1, x, y) = f(x, y)$. I punti impropri di $f(x, y) = 0$ sono dati dalle terne $(0, x, y)$ tali che $g(0, x, y) = 0$.

Le due rette $y = \pm x$ costituiscono gli asintoti dell'iperbole $x^2 - y^2 - 1 = 0$, a cui si avvicinano indefinitamente. Nel piano proiettivo le intersezioni dell'asintoto $x_2 = x_1$ coll'iperbole «estesa» $(x_1/x_0)^2 - (x_2/x_0)^2 = 1$ si trovano col sistema $x_2 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$, il quale conduce alle due soluzioni coincidenti $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_0 = 0$; dunque esso non solo interseca l'iperbole nel piano proiettivo, ma risulta persino tangente ad essa nel punto improprio $(0, 1, 1)$. Immergendo poi il piano proiettivo reale nel piano proiettivo complesso e tenendo conto anche della molteplicità d'intersezione, si perviene facilmente alla conclusione che ogni retta ha sempre due intersezioni con ellisse, parabola, iperbole (proprie o improprie, reali o complesse, distinte o coincidenti).

f) Si considerino ora le intersezioni di due coniche $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, dove, per non ricadere nel caso *d*), $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono due polinomi di secondo grado privi di fattori comuni. Per determinare tali intersezioni, si deve eliminare la variabile x (oppure la y) dal sistema $f(x, y) = g(x, y) = 0$. Tale eliminazione, pur non essendo cosí semplice come nel caso *e*) precedente, si può comunque effettuare in modo abbastanza rapido e conduce in generale a un'equazione di quarto grado. Si perviene quindi alla conclusione che nel piano proiettivo complesso due coniche hanno sempre quattro punti d'intersezione contati con la dovuta molteplicità (è un caso particolare del «teorema di Bezout»).

g) Nel piano affine reale si nota, relativamente al problema delle intersezioni, una differenza tra l'ellisse, da una parte, e l'iperbole oppure la parabola, dall'altra. Un punto P di un'ellisse non può mai ottenersi come intersezione «completa» con molteplicità 1 dell'ellisse con un'altra curva, che taglia necessariamente l'ellisse in almeno un altro punto Q, generalmente distinto da P ed eventualmente coincidente con P nei casi di tangenza.

Un punto P di un'iperbole è invece ottenibile come intersezione completa dell'iperbole con un'altra curva: basta prendere, come già visto in *e*), una retta per P parallela a un asintoto. E la medesima conclusione vale per la parabola, dove il ruolo dell'asintoto viene invece assunto dall'asse.

L'osservazione ora fatta, opportunamente ripresa con adeguati strumenti algebrici, ha rilievo nella teoria della fattorialità delle varietà algebriche a cui si farà cenno piú avanti.

h) Fissati un punto O di un'ellisse, iperbole, parabola, e una retta r del piano, a ogni punto P della conica si può far corrispondere biunivocamente (con eccezioni) il punto P' intersezione della retta OP con la retta r. Si dimostra che tale corrispondenza è espressa da funzioni razionali (quozienti di polinomi) e dunque ogni conica è in corrispondenza birazionale con una retta.

Un esempio particolarmente semplice di trasformazione birazionale tra conica e retta è il seguente. Le equazioni $x = t$, $y = 1/t$ fanno corrispondere al

punto P' di una retta, associato al parametro reale t (con l'eccezione del valore $t=0$) il punto $P=(x, y)=(t, 1/t)$ che varia sull'iperbole di equazione $xy-1=0$; l'applicazione inversa è data dalla relazione $t=x$ (oppure dalla relazione $t=1/y$, dove si tenga conto che $xy=1$).

3.2. Le curve algebriche piane. Irriducibilità, molteplicità, intersezioni.

La definizione algebrica di conica suggerisce immediatamente la generalizzazione alle curve (algebriche) piane reali definite da un polinomio $f(x, y)$ di grado qualsiasi (rispetto a un riferimento cartesiano prefissato). Una curva algebrica di ordine n viene quindi definita come luogo dei punti le cui coordinate soddisfano a un'equazione algebrica $f(x, y)=0$, dove $f(x, y)$ è un polinomio di grado n nelle due variabili x, y che può scriversi

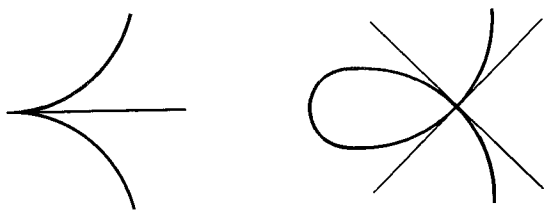
$$f(x, y)=\sum_{0\leq i+j\leq n} a_{ij}x^iy^j$$

dove a_{ij} sono numeri reali tali che almeno un monomio di grado complessivo n sia non nullo.

Dopo le rette e le coniche, gli esempi piú semplici di curve algebriche piane si ottengono quindi in corrispondenza a polinomi di terzo grado: tali curve sono denominate cubiche.

La cubica $y-x^3=0$ ha un andamento del tutto simile a quello della parabola $y-x^2=0$ nel primo quadrante, ma a differenza di quest'ultima, che è simmetrica rispetto all'asse delle y, la cubica è simmetrica rispetto all'origine (in realtà sotto altri aspetti risultano molto diverse; cfr. p. 684).

La cubica $y^2-x^3=0$ ha un comportamento simile a quello della parabola $y-x^2=0$ nel primo quadrante, però è simmetrica rispetto all'asse delle x. Questo fatto ha come conseguenza un comportamento della curva nell'origine che è sensibilmente diverso da quello delle curve $y-x^2=0$ e $y-x^3=0$; queste ultime si presentano «lisce» nell'origine (o, se si preferisce, in un intorno dell'origine), mentre la cubica $y^2-x^3=0$ ha nell'origine un punto angoloso o «cuspidato» (fig. 6*a*). Tutte e tre le curve ora considerate hanno come tangente



a) *b*)

Figura 6.
a) Cuspide (le due tangenti coincidono); *b*) nodo (due tangenti distinte).

nell'origine la retta $y=0$; tuttavia, anche da un punto di vista intuitivo, il contatto di tangenza si presenta un po' anomalo nel caso della curva $y^2-x^3=0$ in quanto la retta $y=0$ appare come doppiamente tangente alla curva nell'origine. Questo fatto trova una conferma eloquente dal lato algebrico: si vedrà infatti che l'origine va riguardata come un punto di molteplicità 2 per tale cubica.

Anche la cubica $y^2-x^2-x^3=0$ ha un punto «doppio» nell'origine (fig. 6*b*); ma questa volta il fatto è molto piú appariscente. Infatti la curva presenta un aspetto nodale e il nodo è situato nell'origine; si suole anche dire che nell'intorno dell'origine vi sono due rami distinti con rispettive tangenti distinte.

Si è quindi in presenza, nel caso delle cubiche, di una situazione che non ha riscontro nel caso delle coniche. L'ellisse, l'iperbole e la parabola sono prive di punti doppi; questi ultimi sussistono solo nel caso di una conica spezzata in due rette passanti per un punto. Invece le cubiche $y^2-x^3=0$ e $y^2-x^2-x^3=0$ sono irriducibili e hanno entrambe un punto doppio. La presenza dei punti multipli per le curve irriducibili ha una notevole importanza per diverse questioni che saranno esaminate tra poco.

Irriducibilità. Si è detto, senza alcuna giustificazione, che le cubiche $y^2-x^3=0$ e $y^2-x^2-x^3=0$ sono curve irriducibili. Ciò è vero, ma non ci si può basare solamente sul fatto intuitivo che il grafico di quelle curve presenta le caratteristiche dell'irriducibilità: del resto il grafico dell'iperbole si presenta come composto di due rami distinti, anche se si è giustamente asserito a suo tempo che l'iperbole è una curva irriducibile.

Si presenta a questo punto necessaria una definizione precisa d'irriducibilità per le curve algebriche; la si può dare cosí: una curva algebrica è irriducibile se non è unione di due curve algebriche entrambe distinte da essa (questa definizione è soltanto un adattamento alla presente situazione della definizione di insieme algebrico irriducibile, che verrà data piú avanti nel quadro degli insiemi algebrici).

Non è affatto detto in generale che un polinomio $f(x, y)$ irriducibile definisca una curva algebrica irriducibile. Si è già visto che, se ci si limita a considerazioni nel campo reale, il polinomio x^2+y^2 definisce una «conica» ridotta al solo punto $(0, 0)$ (dunque in tal caso si ha una situazione limite o degenere e non si può parlare di conica o curva nel senso intuitivo e appropriato del termine); analogamente il polinomio $(x-1)^2+y^2$ definisce il punto $(1, 0)$. Ora, il polinomio $(x(x-1))^2+y^2$, che è irriducibile, definisce la «curva» costituita dai due punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ che può appunto essere considerata come unione delle due «curve», ognuna costituita da uno dei due punti precedentemente indicati.

Si pone allora la domanda seguente: nel campo reale, che relazione c'è fra l'irriducibilità di una curva e l'irriducibilità del polinomio f che la definisce? Gli esempi visti persuadono che un polinomio irriducibile può definire una curva riducibile, sia pure di tipo degenere. Vale però il seguente teorema:

TEOREMA. *Se f è un polinomio irriducibile sul campo reale avente infiniti zeri (cioè vi sono infiniti punti a coordinate reali che soddisfano all'equazione $f=0$), allora la curva $f=0$ è irriducibile.*

Per stabilire la proprietà suddetta si può usare un procedimento algebrico elementare di eliminazione (basato sul «lemma di Gauss» relativo alla divisibilità nell'ambito degli anelli di polinomi) per dedurre che se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono due polinomi privi di fattori comuni (ovvero primi tra loro) i punti comuni alle due curve sono necessariamente finiti; da questo fatto il nostro asserto segue facilmente. Il criterio indicato è quindi molto utile per stabilire situazioni d'irriducibilità nel campo reale. Ad esempio si vede molto facilmente che le due curve $y-x^3=0$ e $y^2-x^3=0$ hanno infiniti punti reali e dunque si giustifica l'irriducibilità di tali curve asserita precedentemente.

Nel campo complesso il problema della irriducibilità si chiarisce in modo completo grazie al teorema degli zeri di Hilbert, di cui si parlerà piú avanti (cfr. § 3.5). Con le nozioni finora introdotte si può però già affermare che, nel campo complesso, una curva è irriducibile se e soltanto se tale è il polinomio f che la definisce, in quanto ogni curva complessa ha necessariamente infiniti zeri. In effetti, se si suppone per semplicità che $f(x, y)$ contenga effettivamente la variabile y, per ogni scelta $x=a\in\mathbf{C}$ della variabile x ci sono certamente nel campo complesso soluzioni $y=b$ dell'equazione $f(a, y)=0$. Pertanto tutti gli infiniti punti (a, b) appartengono alla curva. Ad esempio il polinomio x^2+y^2, che nel campo reale ha solo uno zero, nel campo complesso si annulla su tutti i punti delle rette $y=\pm ix$.

Molteplicità. Riprendendo ora in esame le cubiche, si vede che ve ne sono alcune spezzate in una retta e una conica irriducibile (ad esempio, la cubica $(x-y)(y-x^2)=0$) e altre spezzate in tre rette (ad esempio: $xy(x+y-1)=0$). In tal modo hanno origine i punti doppi o multipli delle curve in questione prodotti dalle intersezioni a due a due delle varie componenti irriducibili di tali curve: è una situazione del tutto simile a quella del punto doppio di una conica spezzata in due rette. Tuttavia va tenuto ben presente il fatto, indicato prima, che possono esserci punti multipli anche sulle curve irriducibili. Sarà utile nel seguito ricordare che, data la curva proiettiva C di equazione $f(x, y)=0$ (nel piano affine $x_0=1$) i suoi punti multipli si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ \partial f(x, y)/\partial x=0 \\ \partial f(x, y)/\partial y=0. \end{cases}$$

Questo calcolo non tiene conto dei punti multipli all'infinito, che si possono recuperare considerando il piano affine $x_1=1$ (o $x_2=1$).

Intersezioni. Per calcolare il numero delle intersezioni di una retta con una curva conviene ancora, come nel caso delle coniche, immergere il piano affine reale (nell'ambito del quale si sono svolte le considerazioni precedenti) nel piano proiettivo complesso. Ciò è dovuto ai seguenti motivi di carattere generale. Il campo complesso $\mathbf{C}$ è un campo algebricamente chiuso, cioè tale che ogni equazione algebrica in una variabile a coefficienti in $\mathbf{C}$ ammette sempre soluzioni;

da ciò segue che se $f(x)$ è un polinomio di grado n a coefficienti complessi (in particolare reali), l'equazione $f(x)=0$ ha sempre n soluzioni complesse, se ciascuna viene contata con la dovuta molteplicità. Il passaggio dal campo reale $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C}$, se anche toglie una completa efficacia alla rappresentazione grafica, consente però il recupero totale delle soluzioni finite nel caso di problemi d'intersezioni di curve. Inoltre il passaggio dal piano affine $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ al piano proiettivo $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ consente l'ulteriore recupero dei punti all'infinito della curva, che appaiono quando invece di $f(x, y)=0$ si considera $g(x_0, x_1, x_2)=0$ ove $g(x_0, x_1, x_2)$ è un polinomio tale che $f(x_1/x_0, x_2/x_0)=g(x_0, x_1, x_2)/x_0^n$ ed n è il grado di f.

Si dimostra immediatamente che le intersezioni di una retta con una curva di ordine n in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sono esattamente n se contate con la dovuta molteplicità (purché la retta non sia parte della curva).

Ad esempio una retta del tipo $y=tx$ incontra la cubica $y^2-x^2-x^3=0$ in tre punti perché due intersezioni sono assorbite nell'origine (un punto doppio): algebricamente si trova il sistema $y-tx=x^2(t^2-x-1)=0$ a cui corrispondono il punto $(0, 0)$ contato due volte e il punto (t^2-1, t^3-t) variabile con t. Si può notare che il terzo punto (t^2-1, t^3-t) coincide anch'esso coi primi due se $t=\pm 1$. Ciò porta a riguardare le due rette $y=\pm x$ come tangenti alla cubica nell'origine O in quanto hanno tre intersezioni con la cubica assorbite dal punto O (geometricamente le due rette risultano rispettivamente tangenti ai due rami del «nodo»). Analogamente l'intersezione della retta $y=tx$ con la «cubica cuspidata» $y^2-x^3=0$ porta al sistema $y-tx=x^2(t^2-x)=0$, da cui risultano sempre tre intersezioni della retta con la curva di cui due assorbite dall'origine O; se $t^2=0$ si hanno tre intersezioni riunite in O e quindi la retta $y=0$ è la tangente nell'origine che va contata due volte perché $t=0$ è radice doppia dell'equazione $t^2=0$.

Piú generalmente, se una curva ha in P un punto s-uplo (punto multiplo o singolare di molteplicità $s\geq 1$), ogni retta del piano passante per P ha almeno s intersezioni riunite in P; si potrebbe vedere che fra tali rette ve ne sono soltanto s (eventualmente non tutte distinte) che hanno una ulteriore intersezione colla curva in P: queste s rette sono le tangenti alla curva in P.

Il calcolo delle intersezioni di due curve di ordine qualsiasi richiede invece l'uso di strumenti piú laboriosi in quanto, già nel piano reale, si tratta di eliminare una delle due variabili x, y da un sistema del tipo $f(x, y)=g(x, y)=0$. Si è già accennato a un primo tipo elementare di eliminazione. Ve n'è un altro, ormai classico, che conduce allo stesso risultato e che fa uso del «risultante» di Sylvester. Con procedimenti di questo tipo si perviene a stabilire per via elementare il teorema di Bezout:

TEOREMA (Bezout). *Due curve algebriche piane proiettive, prive di curve comuni, di ordini rispettivi m ed n, hanno sempre $m\cdot n$ intersezioni in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, purché siano contate con la dovuta molteplicità (naturalmente per curve affini, su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$, e per curve del piano proiettivo reale, le intersezioni sono al piú $m\cdot n$).*

L'enunciato di cui sopra, molto spedito e comprensibile, mette in risalto la natura globale del problema ma non consente una visione approfondita del suo

aspetto «locale» che consiste nel computo della molteplicità d'intersezione di due curve in un loro punto comune P.

È chiaro che, se due curve hanno in comune un punto multiplo e qualche tangente, il numero d'intersezioni, calcolato per via algebrica in modo opportuno, può essere molto alto: se P è r-uplo per una curva e s-uplo per l'altra, ci saranno in P almeno $r \cdot s$ intersezioni senza escludere che siano di piú, nel caso di tangenti comuni. Dunque la tangente o le tangenti comuni sono segno di contatto intimo fra le curve. Ad esempio le due curve $y = x^2$ e $y = x^3$ hanno nell'origine la stessa retta tangente ($y = 0$) e le intersezioni riunite in tale punto sono due, come si deduce dal fatto che nel sistema $y - x^2 = x^2(1 - x) = 0$ il punto $(0, 0)$ è soluzione doppia.

Anello quoziente e anello locale. Il metodo di eliminazione col risultante non è l'unico strumento algebrico atto a definire la molteplicità d'intersezione di due curve in un loro punto comune. Si conoscono oggi proprietà algebriche (afferenti piú precisamente all'algebra commutativa) che consentono un diverso approccio alla nozione di molteplicità e al teorema di Bezout; esse sono basate sul concetto di anello quoziente e di anello locale (cfr. il § 4 dell'articolo «Divisibilità» di questa stessa *Enciclopedia*).

Gli elementi dell'anello $k[x, y]$ (cioè i polinomi in due variabili a coefficienti nel corpo commutativo k) sono particolari funzioni (o applicazioni) definite nel piano affine $\mathbf{A}^2(k)$ a valori in k. Se $f(x, y) = 0$ è una curva piana, si considerino le restrizioni di tali funzioni polinomiali alla curva; vi possono essere allora due polinomi distinti $g(x, y)$ e $h(x, y)$ che individuano la stessa funzione ristretta alla curva (ad esempio $x + y$ e y hanno gli stessi valori in ogni punto in cui è $x = 0$): basta che g e h differiscano per un multiplo di f. Ora, vi è un procedimento algebrico di carattere generale che consente di «identificare» due polinomi siffatti definiti sulla curva $f = 0$; questa identificazione si chiama «passaggio al quoziente». Le funzioni polinomiali cosí ottenute costituiscono ancora un anello (cioè due funzioni siffatte si possono sommare e moltiplicare in modo appropriato) e, nel caso in questione, tale anello quoziente dicesi anello delle coordinate della curva $f = 0$. Se f ha infiniti punti razionali su k (cioè con le coordinate a valori in k), ogni polinomio nullo nei punti dove $f = 0$ è un multiplo di f; in tal caso l'anello quoziente di cui sopra coincide con $k[x, y]/(f)$, anello quoziente di $k[x, y]$ modulo f, i cui elementi sono classi di polinomi che differiscono per multipli di f. La nozione di anello quoziente ha una validità molto piú generale; se ad esempio, in luogo dell'insieme dei polinomi multipli di f, si considera l'insieme $\mathfrak{J}$ dei polinomi che possono scriversi nella forma $hf + lg$ (dove h ed l sono polinomi), insieme denominato ideale generato da f e g, si può definire analogamente l'anello quoziente $k[x, y]/\mathfrak{J} = k[x, y]/(f, g)$.

Se poi in luogo dell'anello dei polinomi $k[x, y]$ si considerano le frazioni g/h, dove h è un polinomio non nullo in P (cioè la curva $h = 0$ non passa per P), si ottiene un nuovo anello contenente $k[x, y]$, che dicesi anello locale del piano nel punto P; tale anello si denota $k[x, y]_P$ e ha un solo ideale massimale (corrispondente geometricamente al punto P).

È quindi possibile definire gli anelli quozienti $A = k[x, y]_P/(f)$ (che dicesi anello locale della curva $f = 0$ nel punto P) e $B = k[x, y]_P/(f, g)$. Quest'ultimo anello B, se f e g sono privi di fattori comuni, risulta uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo k.

I due anelli A e B introdotti sopra consentono una traduzione algebrica notevole di proprietà geometriche relative alla molteplicità di un punto P di una curva e d'intersezione in P di due curve.

Ad esempio, si ha il risultato seguente: il punto P è un punto semplice (cioè non multiplo, ovvero con molteplicità 1) per la curva irriducibile $f = 0$ se e soltanto se nell'anello A ogni elemento è multiplo di un elemento fisso g (in algebra commutativa si usa questa denominazione: A è un anello «di valutazione discreta», oppure A è un anello «locale regolare di dimensione 1») (cfr. § 6.5).

Si può inoltre definire la molteplicità d'intersezione delle due curve $f = 0$ e $g = 0$ nel punto P mediante la dimensione su k dello spazio vettoriale B; anche il teorema di Bezout per le curve piane può essere dimostrato completamente sulla base di tale definizione.

È questo un tipico esempio di «algebrizzazione» di un problema geometrico: il problema viene a un tempo chiarito e allontanato dall'intuizione.

3.3. Trasformazioni birazionali e genere delle curve piane.

Le considerazioni svolte sulla corrispondenza birazionale tra una retta e una conica possono essere riprese nell'analisi delle curve algebriche di ordine superiore.

Si consideri una cubica con un punto doppio nodale O e una retta r; ad un punto P variabile sulla cubica si può far corrispondere biunivocamente (con eccezioni) il punto P' intersezione della retta OP con r. La corrispondenza inversa è univoca in quanto, fissato P', la retta OP' ha due intersezioni fisse con la cubica in O e la terza è data da un punto P che viene appunto associato univocamente a P'; quando P' è tale che la retta OP' coincide con una delle due tangenti in O alla cubica, il punto corrispondente a P' è O; quindi al punto O corrispondono due punti della retta (e questa è l'unica eccezione alla biunivocità).

La corrispondenza di cui sopra, sia in un senso sia nell'altro, è espressa da funzioni razionali; si tratta quindi di una trasformazione birazionale tra la cubica e la retta. Ad esempio, se $P' = (t)$ varia sulla retta, il punto $P = (x, y) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ varia sulla cubica $y^2 - x^2 - x^3 = 0$; l'applicazione inversa è espressa dalla funzione razionale $t = y/x$.

Nelle considerazioni di cui sopra la presenza del punto doppio è essenziale: non solo non si può in alcun modo ripetere il ragionamento per una cubica priva di punti multipli (quale, ad esempio, $x^3 + y^3 - 1 = 0$), ma la birazionalità tra cubica e retta in tal caso non sussiste. Peraltro (come spesso nel seguito) le argomentazioni svolte in precedenza valgono anche se il punto doppio è una «cuspide di prima specie» (ad esempio l'origine per la curva $y^2 - x^3 = 0$ il cui punto variabile ha coordinate $x = t^2$, $y = t^3$).

Il ragionamento precedente, che permette di trovare una corrispondenza birazionale fra la cubica nodata (dotata cioè di un nodo, punto doppio con due tangenti distinte) e la retta, si può estendere a curve di ordine n, purché siano dotate di un numero sufficientemente alto di nodi. Precisamente, si può far vedere che la birazionalità si ottiene con $d=(n-1)(n-2)/2=[n(n-3)/2]+1$ nodi esattamente. Il procedimento è solo piú complicato dal punto di vista del calcolo, ma concettualmente identico. Ad esempio, per una quartica (curva di grado 4) con $3=(4-1)(4-2)/2$ nodi si procederà come segue: le coniche passanti per i tre punti doppi e per un ulteriore punto semplice della quartica formano un fascio, cioè si possono ottenere come combinazione lineare di due qualsiasi di esse: $g(x, y)+th(x, y)=0$, dove t è un parametro reale. La conica generica del fascio e la quartica hanno (nel piano proiettivo complesso) $8=4\cdot 2$ intersezioni, grazie al teorema di Bezout; di queste, due sono raccolte in ciascuno dei punti doppi e una nel punto semplice; in totale sette sono fissate. Per ottenere l'ottava ci si riduce a risolvere un'equazione di primo grado, che fornisce le coordinate x e y come funzioni razionali di t.

Si osservi ancora che un punto doppio per la cubica, ovvero tre punti doppi per la quartica, sono il massimo possibile di punti multipli compatibili con l'irriducibilità della curva stessa. Ad esempio, se una cubica possiede due nodi P e Q, la retta PQ ha con la cubica due intersezioni almeno in P e due almeno in Q; cioè ha almeno quattro intersezioni, contro il teorema di Bezout, che pone tre come limite superiore. Allora necessariamente la retta è parte della cubica, composta dalla retta e da un'altra curva (una conica, o due rette ulteriori).

Si può dunque affermare che la birazionalità con la retta si ottiene quando una curva di grado n possiede il massimo numero di nodi che le è consentito dalla condizione di non essere spezzata, oppure ha punti multipli (singolari) tali da compensare il difetto dei punti doppi nodali. Perciò, se una curva piana proiettiva, dotata al piú di sole singolarità nodali, non è birazionalmente equivalente a una retta, essa «ha pochi nodi».

Una curva C (non necessariamente piana) in corrispondenza birazionale con i punti di una retta si dice razionale. È dunque interessante considerare il «difetto di razionalità» della curva, calcolabile in termini di nodi (quando non ci siano singolarità piú complicate, che fanno modificare tutto il discorso). Se C ha grado n e ha d nodi, vi è un numero, indicato con p_g o semplicemente con p, denominato «genere (geometrico)» della curva C, che esprime convenientemente il difetto di razionalità della curva; esso è dato dalla formula $p=[(n-1)(n-2)/2]-d=[n(n-3)/2]+1-d$ quando la curva C è piana.

Si può dimostrare che una curva piana proiettiva complessa dotata di sole singolarità nodali è razionale se e soltanto se $p=0$; in particolare p è nullo per una retta, come subito si verifica in quanto $n=1$ e $d=0$.

Se tra le curve C, C' sussiste una corrispondenza birazionale, se cioè le coordinate dei punti di C si esprimono mediante funzioni razionali delle coordinate dei punti di C' e viceversa, si dice che C e C' sono birazionalmente equivalenti; tale relazione di equivalenza birazionale è manifestamente transitiva, da cui in particolare: se C' è birazionalmente equivalente a C e C è razionale, anche C' è razionale. Dunque, essere una curva razionale, ovvero la condizione $p=0$, è una proprietà della curva invariante per trasformazioni birazionali.

Quanto detto sopra è molto limitato, rispetto a quanto si può invece asserire con tutta generalità ponendosi da un punto di vista meno elementare. In effetti si può definire (e in vari modi) il genere p di una curva algebrica qualsiasi, non necessariamente piana; naturalmente tale genere può calcolarsi con la formula indicata sopra nel caso di curve piane munite di sole singolarità nodali (o cuspidate di prima specie).

Per avere un esempio di trasformazione birazionale tra due curve piane di tipo meno elementare di quelli considerati prima, è opportuno considerare le trasformazioni birazionali tra due curve piane come restrizione di una trasformazione birazionale tra due piani. E, per esigenze di completezza, conviene considerare due piani proiettivi anziché due piani affini.

Le piú semplici trasformazioni birazionali tra due piani proiettivi sono le proiettività espresse dalle relazioni lineari

$$x'_i=a_{i0}x_0+a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 \qquad 0\leq i\leq 2, \tag{2}$$

con la condizione che il determinante della matrice (a_{ij}) sia non nullo.

Le (2) esprimono il passaggio dal punto (x_0, x_1, x_2) del piano proiettivo $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ al corrispondente punto (x'_0, x'_1, x'_2) del piano proiettivo $\mathbf{P}'^2(\mathbf{C})$ ed è facile mostrare che anche la trasformazione inversa è espressa da relazioni analoghe alle (2).

Le proiettività forniscono trasformazioni birazionali (intere) senza eccezioni che conservano completamente la molteplicità dei punti e la natura della loro singolarità; ora questo è proprio il loro limite nei problemi di natura birazionale, dove occorrono trasformazioni che alterino la natura dei punti singolari, cioè trasformino punti singolari di molteplicità s in punti singolari di molteplicità $t\neq s$, tangenti distinte in tangenti coincidenti e viceversa.

Trasformazioni quadratiche. Le piú semplici trasformazioni birazionali non lineari sono le trasformazioni quadratiche; esse sono espresse da polinomi di secondo grado e costituiscono un caso particolare delle cosiddette «trasformazioni cremoniane» (dal matematico italiano Luigi Cremona), definite piú generalmente come trasformazioni birazionali tra spazi di dimensione qualsiasi.

Si consideri ad esempio la trasformazione quadratica ω espressa da:

$$\begin{cases} x'_0=x_0x_1 \\ x'_1=x_1^2 \\ x'_2=x_0x_2 \end{cases} \tag{3}$$

che fa passare dal punto (x_0, x_1, x_2) di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ al punto (x'_0, x'_1, x'_2) di $\mathbf{P}'^2(\mathbf{C})$. Si vede facilmente che la trasformazione inversa ω^{-1} di ω è espressa da:

$$\begin{cases} x_0=x'^2_0 \\ x_1=x'_0x'_1 \\ x_2=x'_1x'_2. \end{cases} \tag{3'}$$

Si ha infatti: $\omega^{-1}\omega(x_0, x_1, x_2) = \omega^{-1}(x_0', x_1', x_2') = \omega^{-1}(x_0x_1, x_1^2, x_0x_2) = (x_0^2x_1^2, x_0x_1^3, x_0x_1^2x_2) = x_0x_1^2(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, x_2)$ dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che le coordinate di un punto sono definite a meno di un fattore di proporzionalità. Le (3′) mostrano che anche ω^{-1} è una trasformazione quadratica.

È opportuno notare subito che vi sono però delle eccezioni alla corrispondenza birazionale (3) che compaiono nei punti (x_0, x_1, x_2) tali che $x_0 = 0$ oppure $x_1 = 0$ (casi in cui si annulla il fattore di proporzionalità $x_1^2x_0$ trovato prima, onde il ragionamento precedente cade in difetto). Ed infatti le (3) non fanno corrispondere alcun punto di $\mathbf{P}'^2(\mathbf{C})$ al punto $Q = (0, 0, 1)$ di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$; ad ogni punto $(0, x_1, x_2)$, cioè ad ogni punto della retta $x_0 = 0$ distinto da Q corrisponde, sempre mediante le (3), il «punto fisso» $(0, 1, 0)$ e ad ogni punto $(x_0, 0, x_2)$ distinto da Q corrisponde sempre il punto $(0, 0, 1)$. Analoghe eccezioni sussistono in senso inverso.

Si consideri nel piano $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la quartica C di equazione $x_0^2(x_2^2 - x_1^2) + x_1^3x_2 = 0$. Mediante le (3′) si vede che l'equazione della curva C', trasformata di C nel piano $\mathbf{P}'^2(\mathbf{C})$, ha equazione $x_0'^4(x_2'^2x_1'^2 - x_1'^2x_0'^2) + x_1'^4x_0'^3x_2' = x_0'^3x_1'^2(x_0'x_2'^2 - x_0'^3 + x_1'^2x_2') = 0$. A parte le eccezioni, costituite dai punti di $\mathbf{P}'^2(\mathbf{C})$ in cui $x_0' = 0$ oppure $x_1' = 0$, si può dire che la trasformata C' di C è la cubica di equazione $x_0'x_2'^2 - x_0'^3 + x_1'^2x_2' = 0$. Un semplice computo di derivate parziali permette di vedere che la quartica C ha due punti doppi: il punto doppio nodale $P = (1, 0, 0)$ (origine) e il punto doppio cuspidale $Q = (0, 0, 1)$ (punto improprio dell'asse y); invece C' è una cubica «liscia», cioè priva di punti doppi. Ciò è in accordo col calcolo del genere di C e C' ottenuto con la formula $[(n-1)(n-2)/2] - d$ che fornisce 1 in entrambi i casi.

Per determinare i punti di C' che corrispondono a P, tenuto presente dalle (3′) che P proviene mediante ω^{-1} dai punti del piano $\mathbf{P}'^2(\mathbf{C})$ tali che $x_1' = 0$, si deve risolvere il sistema $x_1' = x_0'x_2'^2 - x_0'^3 + x_1'^2x_2' = 0$ che conduce ai tre punti $P_1' = (0, 0, 1)$ (privo di immagine in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$), $P_2' = (1, 0, 1)$ e $P_3' = (-1, 0, 1)$; dunque P_2' e P_3' sono i punti di C' che corrispondono a P. Si può poi estendere in modo naturale, ricorrendo per esempio a nozioni di continuità, la ω^{-1} anche nel punto $P_1' = (0, 0, 1)$ (dove non risulta definita mediante (3′)) e concludere che il punto $P_1' = (0, 0, 1)$ è l'unico punto di C' corrispondente a Q. Con ragionamenti ancora piú raffinati si potrebbe poi associare, in un certo modo, i due punti P_2' e P_3' alle due tangenti in P a C e il punto P_1' all'unica tangente in Q (sono le situazioni in cui si parla di punti «infinitamente vicini»).

Mediante le trasformazioni quadratiche si possono trasformare i punti singolari della curva originaria in punti di molteplicità inferiore e meno complicata; si ha inoltre uno strumento notevole per un'analisi profonda dei punti singolari.

Questi fatti erano ben noti ai geometri dell'Ottocento; ad esempio Brill e Noether, negli anni 1870-80, riescono a provare che, applicando una successione finita di trasformazioni quadratiche, si può trasformare una curva piana dotata di punti multipli qualsiasi, arbitrariamente complicati, in un'altra curva piana dotata di soli nodi (eventualmente priva di punti multipli). Questo procedimento, opportunamente integrato da un altro tipo di trasformazione birazionale, permette addirittura di trasformare una curva algebrica piana in una priva di singolarità, contenuta però nello spazio a tre dimensioni anziché nel piano. Al problema di trovare un modello birazionale non singolare di una curva con singolarità qualsiasi si sono dedicati parecchi geometri e con metodi diversi (algebrici o puramente geometrici) Brill e Noether, Clebsch, Bertini, Hensel. Un importante aspetto di questi studi consiste nella possibilità di analizzare e di classificare le singolarità delle curve algebriche, tenendo conto della molteplicità, ma anche di vari altri fattori: il numero di tangenti distinte, la molteplicità dei vari punti che si ottengono nelle trasformazioni quadratiche intermedie, che conducono alla desingolarizzazione. Ad esempio, si può caratterizzare un nodo come un punto doppio che, in una trasformazione quadratica diventa una coppia di punti semplici, una cuspide di prima specie come un punto doppio che diventa un punto semplice, ecc. I punti che si ottengono a partire da un dato punto singolare mediante trasformazioni quadratiche si dicono «infinitamente vicini» al punto dato e, pur non essendo punti della curva data inizialmente, per certi aspetti si comportano come se lo fossero. Si è detto, ad esempio, che, per calcolare il genere p di una curva con soli nodi e di ordine n, basta calcolare il numero $[(n-1)(n-2)/2] - d$, dove d è il numero dei nodi; se invece la curva ha singolarità piú complicate si può usare una formula analoga alla precedente in cui si tenga conto anche dei punti singolari infinitamente vicini. Ad esempio, se una quartica ha un punto doppio, cui succede infinitamente vicino un altro punto doppio che a sua volta diventa semplice in un passo, allora il genere p è il numero $1 = 3 - 2$, in quanto dobbiamo tener conto di entrambi i punti doppi, quello che appare e quello nascosto e che emerge solo con la trasformazione quadratica.

Dunque la teoria dei punti singolari permette fra le altre cose di vedere in modo piú penetrante il genere di una curva algebrica: il «difetto di razionalità» coincide con un numero che si calcola tenendo conto della piú riposta struttura dei punti singolari. Pertanto lo scioglimento delle singolarità permette di gettar luce sul primo invariante birazionale studiato dai geometri algebrici dopo Riemann, cioè il genere.

Il teorema di Riemann-Roch per le curve. A Riemann è dovuta la prima formulazione del celebre «teorema di Riemann-Roch» per le curve, che nel linguaggio classico si esprime in termini di «serie lineari»; esso può essere illustrato brevemente, con riferimento a una curva piana priva di punti multipli, usando la nozione di sistema lineare di curve piane. Un tale sistema si ottiene considerando $r+1$ curve $C_0, \ldots, C_r$, tutte dello stesso grado m e formando le loro possibili combinazioni lineari a coefficienti complessi; se $f_i = 0$ è l'equazione omogenea di C_i, il sistema lineare è formato dalle curve del tipo $a_0f_0 + \ldots + a_rf_r = 0$. Ogni curva taglierà su C un gruppo di punti, esattamente $m \cdot n$ grazie al teorema di Bezout, se li si conta sapientemente. Questi gruppi di $m \cdot n$ punti, variabili con i coefficienti a_i, formano una «serie lineare» sopra la curva C. D'ora in poi si supporrà che le equazioni $f_i = 0$ siano indipendenti e che nessuna delle curve C_i contenga C come parte. È evidente che i gruppi di punti sono in corrispon-

denza biunivoca con le $(r+1)$-uple di numeri complessi $(a_0, \ldots, a_r)$. Siccome queste ultime variano nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$ si può dire che la serie lineare ha dimensione r; essa si denota g_s^r dove $s=m\cdot n$. Il problema di Riemann consiste nel trovare quali relazioni intercorrono fra i due numeri r ed s, facendo intervenire invarianti birazionali della curva come il genere, quando la serie sia «completa», cioè tagliata dal sistema di tutte le curve di ordine m (escluse quelle che contengono C). In questa direzione Riemann (1857) prova che si ha sempre $r \geq s-p$ se p è il genere di C; quindi la disuguaglianza può scriversi come un'uguaglianza $r=s-p+i$, purché si sappia interpretare geometricamente il numero i detto indice di specialità. Ciò si può fare in termini di «serie canonica», usando ad esempio il seguente metodo di Brill e Noether; si considerano perciò tutte le curve del piano di ordine $n-3$; tali curve si chiamano aggiunte e formano un sistema lineare avente dimensione $n(n-3)/2$, in quanto dipendono da $[n(n-3)/2]+1$ coefficienti complessi omogenei (tanti sono i monomi di grado $n-3$). Pertanto le aggiunte di ordine $n-3$ tagliano su C una serie lineare g_s^r dove r è la dimensione $n(n-3)/2$ e s è il numero di punti di ogni gruppo, cioè $s=n(n-3)$, per il teorema di Bezout. Si è visto che, per una curva non singolare, il genere p coincide con il numero $(n-1)(n-2)/2=[n(n-3)/2]+1$; quindi la serie canonica è una serie del tipo g_{2p-2}^{p-1} (ed è l'unica avente questa dimensione e ordine). L'indice di specialità della serie lineare di partenza si può facilmente esprimere mediante la serie canonica. Precisamente i coincide con il numero di gruppi della serie canonica che contengono un gruppo assegnato della serie in questione (pertanto $i=1$ per la serie canonica stessa e $i=0$ per gruppi di punti tagliati da curve di ordine abbastanza alto).

Il teorema di Riemann-Roch per le curve è un risultato notevolissimo di natura birazionale.

Nell'ambito del programma di Erlangen di Klein la geometria algebrica veniva catalogata come lo studio delle proprietà geometriche invarianti per trasformazioni birazionali. Tale impostazione, già presente nei pionieri della geometria algebrica della scuola tedesca (Riemann, i Noether, Brill, Kummer, Klein, ecc.) e italiana (Cremona, Bertini, Veronese, Corrado Segre) veniva fatta propria dai «successori» Castelnuovo, Enriques, Severi che (fra il 1890 e il 1940) estendevano alle superfici, superando difficoltà notevoli, vari risultati e classificazioni di natura birazionale già stabiliti per le curve (cfr. § 6.3).

I metodi d'indagine usati sono stati per lunghi decenni di tipo geometrico o trascendente, mentre quelli di carattere algebrico sono rimasti lungamente in sordina e venivano preferibilmente evitati dai grandi geometri.

Riemann e la geometria birazionale. Si sono visti in precedenza vari aspetti elementari della geometria algebrica, collegati all'impiego dell'algebra; tuttavia la storia della geometria algebrica non segue generalmente lo sviluppo dal semplice all'elevato. In certo senso lo studio delle curve algebriche fatto da Brill, Max ed Emmy Noether, la teoria algebrica delle varietà in termini di anelli, ideali, eliminazione di Emil Artin, Van der Waerden, Zariski sono piú recenti

di altri punti di vista, basati sulla teoria degli integrali e sulle proprietà topologiche.

Si è finora considerata una curva algebrica complessa dal punto di vista della teoria dei polinomi: essa è definita dall'annullarsi di un polinomio omogeneo a coefficienti complessi e le sue proprietà discendono da quelle del polinomio: grado, intersezione con altre curve, genere, ecc. In realtà una curva algebrica complessa può essere associata in modo naturale a una superficie algebrica reale, quando si pensi che la variabile complessa $z=x+iy$ può essere considerata come una coppia di variabili reali. Pertanto le proprietà delle curve algebriche complesse possono essere studiate sulla varietà reale associata, che viene chiamata superficie di Riemann. Esempio: si consideri il cerchio di equazione $z_1^2+z_2^2=1$, dove z_1 e z_2 sono due variabili complesse. Se si pone $z_1=x_1+iy_1$ e $z_2=x_2+iy_2$, si ottiene, in termini delle variabili reali x_1, y_1, x_2, y_2, l'equazione $(x_1+iy_1)^2+(x_2+iy_2)^2=1$, cioè

$$\begin{cases} x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2=1 \\ x_1y_1+x_2y_2=0. \end{cases}$$

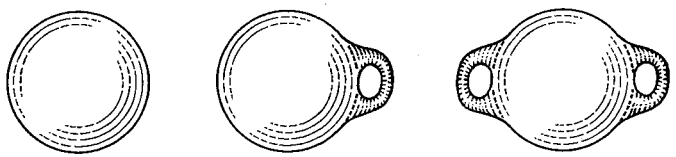
Si hanno cosí due equazioni nelle quattro variabili reali x_1, y_1, x_2, y_2; fissandone una, ad esempio $y_1=c$ (costante), ci si trova in uno spazio reale a tre dimensioni con le variabili restanti. Le due equazioni

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-y_2^2=1+c^2 \\ cx_1+x_2y_2=0 \end{cases}$$

definiscono una curva reale dello spazio a tre dimensioni, intersezione di due quadriche, un iperboloide a una falda, e un paraboloide iperbolico (una coppia di piani se $c=0$). Al variare di c nel campo reale si ottiene una famiglia di curve a tre dimensioni che riempiono una superficie reale «isomorfa a una sfera», come si può verificare, peraltro con una certa difficoltà e tenendo conto del comportamento all'infinito del cerchio e della superficie.

L'esempio ora discusso suggerisce che, in generale, a una curva algebrica proiettiva complessa debba corrispondere una varietà reale di dimensione 2 e compatta. Alla retta complessa (isomorfa al cerchio complesso) corrisponderà una sfera reale; a curve piú complicate, superfici con altre caratteristiche topologiche, come un toro o una «sfera a piú manici o buchi». Le superfici algebriche reali (compatte, connesse e orientabili) possono essere classificate in base al numero dei cosiddetti manici: la sfera ordinaria ne è priva, il toro ne ha uno, ecc. (fig. 7). Si ottiene cosí il genere, cioè proprio il numero che Riemann associa alla curva algebrica complessa come genere. Esso è strettamente collegato alla caratteristica di Eulero-Poincaré, di cui si parlerà nel § 4.3. Solo in seguito il genere viene visto e calcolato algebricamente, basandosi esplicitamente sulle proprietà dell'equazione della curva.

L'invarianza birazionale del genere, già nota a Riemann, costituisce uno dei primi esempi di teorema avente carattere birazionale. L'importanza di considerare proprietà che si conservano per trasformazioni birazionali risale dunque a Riemann, anche se questa tematica non era ignota ai suoi predecessori. Essa



Sfera: $g=0$ Toro: $g=1$ Sfera con due manici: $g=2$

Figura 7.
Genere di una superficie.

si riferisce alla corrispondenza birazionale fra superfici di Riemann e si collega piú o meno direttamente con lo studio degl'integrali abeliani (che conservano lo stesso valore se si applica una trasformazione birazionale).

Gli integrali abeliani sulla curva algebrica complessa $f(z, u)=0$ sono della forma $\int_I R(z, u)\,dz$ dove I è una linea del piano complesso z e u è funzione algebrica di z attraverso la relazione $f(z, u)=0$; già noti ad Abel, Legendre, Jacobi e Gauss furono studiati in modo nuovo da Riemann, a cui si deve la scoperta della coincidenza del genere col massimo numero d'integrali abeliani di prima specie indipendenti.

L'introduzione del genere per via geometrica, riflessa nella presentazione elementare che si è data, ha maggiori legami coll'algebra ed è anche suscettibile di estensioni a un corpo base diverso dal corpo complesso; essa tuttavia oscura sensibilmente la «storia» che vi è dietro, in cui risultano l'intuizione topologica di Riemann e la potenza dei metodi «trascendenti» (computo di manici e calcolo di integrali, cioè operazioni non algebriche).

3.4. Curve e superfici algebriche dello spazio.

Le considerazioni sulle curve piane precedentemente svolte non possono estendersi in modo immediato alle curve dello spazio a causa di qualche complicazione di tipo algebrico.

È comunque molto facile dare qualche semplice esempio di curva algebrica nello spazio. Ad esempio le relazioni

$$(4)\qquad \begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \\ z=t \end{cases}$$

pongono una corrispondenza biunivoca tra un punto P' associato a un parametro reale t variabile nella retta reale e il punto $P=(x, y, z)$ che, al variare di t, descrive un luogo geometrico nello spazio a tre dimensioni a cui è naturale riferire la denominazione di «curva algebrica dello spazio». L'«algebricità» è giustificata dal fatto che il legame tra le coordinate x, y, z è espresso dalle relazioni $y-z^2=x-z^3=0$ ottenute eliminando il parametro t. Inoltre la curva

non è piana, ma effettivamente «spaziale» o «gobba», in quanto ogni piano del tipo $ax+by+cz+d=0$ la incontra in tre punti complessi (corrispondenti alle soluzioni dell'equazione $at^3+bt^2+ct+d=0$); per tale motivo la curva data dalle (4) dicesi cubica gobba.

Sorgono però subito dei problemi: 1) Se il parametro t non fosse comparso al primo grado sarebbe stato ugualmente possibile eliminare la t e dedurne l'algebricità della curva? 2) Supposto che si risponda positivamente a 1) è allora sempre vero che equazioni del tipo (4) pongono una corrispondenza biunivoca tra retta e curva? 3) Come si possono esprimere in generale le curve algebriche dello spazio non razionali (ovvero non descrivibili mediante una rappresentazione parametrica del tipo (4))?

Ebbene le risposte ai quesiti ora posti non sono ovvie. Alla prima domanda la risposta è affermativa, ricorrendo però (come già detto nel discorso relativo alle intersezioni di curve) alla teoria dell'eliminazione che fa comunque ricorso a nozioni algebriche. Anche la risposta alla seconda domanda è affermativa, ma in modo non banale: si può sempre cambiare il parametro in modo da ottenere la voluta corrispondenza biunivoca (con eccezioni), facendo ricorso a un teorema algebrico piuttosto profondo dovuto a Lüroth (cfr. § 6.3).

Alla terza questione si può rispondere solo parzialmente, soddisfacendo certamente le prime curiosità, ma senza esaurire problematiche tuttora aperte.

Si è già osservato che la curva (4) è esprimibile con le due equazioni $y-z^2=x-z^3=0$. Ciascuna delle due equazioni $y-z^2=0$, $x-z^3=0$ può essere interpretata come superficie nello spazio, anzi in questo caso si tratta di superfici molto particolari. Infatti $y-z^2=0$ è, nel piano yz, una parabola; dunque $y-z^2=0$ è un «cilindro» (infinito), con le generatrici parallele all'asse x e passante per la parabola; analogamente, $x-z^3=0$ è l'equazione di un cilindro con le generatrici parallele all'asse y.

È allora del tutto naturale pensare a una superficie algebrica come luogo dei punti dello spazio (x, y, z) soddisfacenti a un'equazione $f(x, y, z)=0$ dove $f(x, y, z)$ è un polinomio a coefficienti reali nelle tre indeterminate x, y, z. Dopo ciò si può pensare una curva algebrica come l'intersezione di due superfici algebriche del tipo suddetto; in tal modo una curva algebrica è espressa da un sistema $f(x, y, z)=g(x, y, z)=0$. Tale impostazione, pienamente accettabile a un primo livello, si presta però ad osservazioni critiche circa la sua limitazione che si vedranno in un secondo momento.

Superfici algebriche. Anzitutto va commentato l'uso del termine 'superficie' per un'equazione del tipo $f(x, y, z)=0$. In effetti si può pensare all'individuazione di un punto del luogo $f=0$ fissando ad arbitrio un punto del piano (x_0, y_0) e determinando poi la quota z risolvendo, eventualmente nel campo complesso (solita estensione da **R** a **C**), l'equazione $f(x_0, y_0, z)=0$ che ha, in generale, un numero finito di soluzioni. Si hanno quindi «due gradi di libertà» nella determinazione di un punto della superficie: uno per la scelta di x e l'altro per la scelta di y; dopo ciò la z è condizionata da un'equazione. Ciò porta ad attribuire la dimensione 2 al luogo $f(x, y, z)=0$ e alla denominazione di superficie.

A questo punto il parallelismo tra la teoria delle curve algebriche e quello delle superfici algebriche risulta del tutto evidente. Le equazioni di primo grado in x, y, z forniscono i piani $ax+by+cz+d=0$, cosí come le equazioni $ax+by+c=0$ sono equazioni di rette. Le equazioni di secondo grado forniscono le quadriche, la cui teoria è un po' piú complicata ma ha molte analogie con quella delle coniche che risultano sezioni piane di quadriche (ma, come si è visto, possono già bastare le sezioni di un cono quadrico per ottenere tutte le coniche). La classificazione delle coniche affini reali può essere effettuata immergendo $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ e considerando le intersezioni delle coniche con la retta impropria (luogo dei punti impropri $(0, x, y)$, situati sulla retta $x_0=0$); analogamente si ha una classificazione delle quadriche reali in ellissoidi, iperboloidi (a una o due falde), paraboloidi (ellittici o iperbolici), coni e cilindri intersecando col piano improprio. Ad esempio, la sfera è un particolare ellissoide: l'equazione $x^2+y^2+z^2-1=0$ rappresenta una sfera con centro nell'origine e raggio 1.

Alcune quadriche, non soltanto i coni e i cilindri, sono rigate, cioè ricoperte da rette. Le superfici algebriche rigate costituiscono un esempio particolarmente significativo di superfici algebriche (cfr. §§ 6.3 e 6.4).

Si può definire l'ordine di una superficie $f(x, y, z)=0$ intersecando la superficie con una retta (espressa come intersezione di due piani o in forma parametrica); l'ordine è dato dal numero dei punti comuni alla retta e alla superficie, previa immersione dello spazio ordinario reale $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ nello spazio proiettivo complesso $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

La decomposizione di una superficie in superfici irriducibili può ottenersi come per le curve piane, con qualche lieve difficoltà in piú. La molteplicità di un punto di una superficie è analoga a quella rispettiva delle curve piane, mentre si hanno maggiori difficoltà per la molteplicità d'intersezione di due o piú superfici. Sussiste comunque il seguente teorema di Bezout nello spazio: tre superfici proiettive complesse dello spazio di ordini rispettivi m, n, p, prive di superfici e curve comuni, hanno $m \cdot n \cdot p$ punti comuni se contati con la loro molteplicità.

Si considerino ora di nuovo le curve algebriche dello spazio espresse come intersezione di due superfici.

La curva C sia dunque espressa come luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano al sistema $f(x, y, z)=g(x, y, z)=0$. La teoria dell'eliminazione (che veramente andrebbe condotta nello spazio proiettivo complesso, anziché in quello reale, con la solita omogeneizzazione e l'aggiunta di una indeterminata) consente di eliminare una variabile, ad esempio z, e di determinare un'equazione $h(x, y)=0$ che aggiunta a una precedente fornisce un sistema equivalente a quello dato. In tal modo si può vedere che per determinare un punto del luogo C si può assegnare arbitrariamente x e dopo vi è solo un numero finito di scelte per y, condizionato dalla relazione $h(x, y)=0$, e quindi per z. Dunque vi è un solo grado di libertà per la determinazione di un punto del luogo, da cui resta giustificata la denominazione di curva attribuita al luogo C.

Si può porre subito la questione di definire l'ordine di una curva C data dalle equazioni $f(x, y, z)=g(x, y, z)=0$. Il modo piú naturale sembra quello di definire tale intero come il numero delle intersezioni di C con un piano generico. Ma come calcolare tale numero? Se si estendono le due superfici f e g allo spazio proiettivo complesso e si suppone che f e g abbiano ordini rispettivi m ed n, il numero delle intersezioni della curva con un piano $l=0$ coincide col numero delle intersezioni delle tre superfici f, g, l che, contate col l'opportuna molteplicità, sono esattamente $m \cdot n \cdot 1 = m \cdot n$, in virtú del teorema di Bezout. Sembra allora del tutto naturale definire «ordine di C» il numero $m \cdot n$. Ma possono sorgere difficoltà: ad esempio una retta r di un cono è intersezione del cono col piano tangente al cono lungo r e allora, secondo il ragionamento fatto sopra, la retta r verrebbe ad avere ordine 2, ciò che è contraddittorio; il fatto è che nell'esempio ora considerato la retta va considerata come intersezione «doppia» del cono con il piano tangente e dunque si deve escludere tale eventualità.

Se dunque si considerano soltanto curve C che siano intersezioni semplici e non multiple di due superfici, occorre definire la molteplicità di tale intersezione, eventualmente ricorrendo al teorema di Bezout, ed escludere inoltre che l'ordine di C dipenda dalla particolare coppia f, g di superfici intersecantesi lungo C. In effetti la nozione generale di ordine di una curva dello spazio ritenuta intuitiva ed elementare dai geometri classici è in realtà tutt'altro che banale e per introdurla con tutta generalità occorrono strumenti piú raffinati; il fatto che tale nozione si presenti quasi immediata in vari esempi semplici (del tipo della cubica definita dalle equazioni (4)), può trarre in inganno e condurre a uno dei tanti trabocchetti di cui è disseminata la geometria algebrica.

È curioso notare che l'ordine di una curva appare fin dai piú semplici esempi un invariante proiettivo (cioè un invariante rispetto alle trasformazioni proiettive). Sarebbe sotto certi aspetti piú facile per una curva spaziale definirne il genere che risulta invece un invariante rispetto alle trasformazioni birazionali, di solito molto piú complicate delle proiettività.

Vi sono altre questioni relative alle curve dello spazio, che sembrano del tutto elementari e sono invece ancora irrisolte. Una di queste riguarda un cosiddetto «problema d'intersezione completa» relativo alle curve dello spazio affine (o proiettivo) a tre dimensioni, cui si accennerà nel seguito, dopo aver premesso la nozione di dimensione di una varietà algebrica affine.

3.5. Generalità sugli insiemi algebrici. Irriducibilità. Dimensione. Intersezioni complete.

Le nozioni di curva algebrica e di superficie algebrica s'inquadrano nel modo piú naturale in quella d'insieme algebrico. D'altra parte è proprio partendo da una definizione piú generale, strettamente collegata a quella di ideale di un anello, che è possibile avere delle idee piú precise anche sui luoghi geometrici elementari, quali le curve dello spazio ordinario per le quali, come si è visto, possono sorgere difficoltà impreviste.

In luogo di una o due equazioni algebriche si consideri un insieme finito di tali equazioni; si supponga inoltre che il numero delle indeterminate sia arbitrario, dopo aver esaminato il caso di due o tre indeterminate che costituivano l'ingrediente algebrico per le indagini nel piano e nello spazio ordinario.

Siano dunque $f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)$ m polinomi dell'anello $A = k[x_1, ..., x_n]$ dei polinomi, in n variabili, a coefficienti in un corpo (commutativo) base k che, solo per fissare le idee, può essere assunto come il corpo reale oppure il corpo complesso. Le n-uple $(x_1, ..., x_n)$ tali che $x_i \in k$ per ogni i si dicono i punti o gli elementi dello spazio affine $\mathbf{A}^n(k) = k^n$.

Il luogo dei punti $x = (x_1, ..., x_n)$ di k^n tali che $f_i(x_1, ..., x_n) = 0$ per ogni i $(1 \leq i \leq m)$ è detto un insieme algebrico di k^n. Talvolta, in analogia con quanto accade nel passaggio dal campo reale a quello complesso, può essere utile considerare gli «zeri» dei polinomi f_i in un campo K contenente k. Quando non vi sono ambiguità relative a tale campo, l'insieme algebrico definito da $f_1, ..., f_m$ si indica con $V(f_1, ..., f_m)$. Si può notare che, se ai polinomi $f_1, ..., f_m$ si aggiunge una qualsiasi combinazione lineare $\Sigma g_i f_i$ dei polinomi f_i a coefficienti g_i in A, l'insieme algebrico associato resta invariato. Ora, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei polinomi f_i, che comprende come elementi gli stessi f_i, costituisce un ideale $\mathfrak{J}$ dell'anello A (la somma di due elementi di $\mathfrak{J}$ e il prodotto di un elemento di $\mathfrak{J}$ per un elemento di A appartengono ancora ad $\mathfrak{J}$). È quindi del tutto naturale definire piú generalmente «insieme algebrico associato all'ideale $\mathfrak{J}$», notato $V(\mathfrak{J})$, l'insieme dei punti le cui coordinate annullano tutti i polinomi dell'ideale $\mathfrak{J}$. In realtà questa seconda definizione è solo apparentemente piú generale della prima, in quanto, per il «teorema della base» di Hilbert, ogni ideale $\mathfrak{J}$ ha un numero finito di generatori $f_1, ..., f_m$ e quindi $V(\mathfrak{J}) = V(f_1, ..., f_m)$.

Un insieme algebrico V è irriducibile, e viene detto varietà affine, se V non è unione di due sottoinsiemi algebrici non vuoti strettamente contenuti in esso. Si può dimostrare con un procedimento molto semplice che ogni insieme algebrico si decompone (e in modo unico) nell'unione di insiemi algebrici irriducibili; ciò segue dal fatto che nell'anello A ogni catena ascendente di ideali è stazionaria e tale fatto chiamato «noetherianità di A» (dal nome di Emmy Noether) è equivalente alla finitezza dei generatori degli ideali di A stabilita, come già detto, da Hilbert.

Tuttavia l'esistenza della decomposizione di cui sopra non riesce molto utile per fornire esempi concreti di varietà irriducibili (oltre a quelli piú elementari, quali le varietà lineari). Se $\mathfrak{J}(V)$ denota l'ideale dei polinomi nulli su V vale la proprietà: «$\mathfrak{J}(V)$ è un ideale primo (cioè $a \notin \mathfrak{J}(V)$, $b \notin \mathfrak{J}(V)$ implica $ab \notin \mathfrak{J}(V)$) se e solo se V è una varietà irriducibile». La difficoltà è quindi scaricata sull'ideale $\mathfrak{J}(V)$ di cui si dirà tra breve.

Gli ideali piú semplici sono gli ideali principali $\mathfrak{J} = (f)$ generati da un solo elemento f; in tal caso $V(f)$ viene denominata ipersuperficie, nozione che generalizza quella di curva piana e di superficie dello spazio ordinario.

Se f è un polinomio irriducibile, $V(f)$ è irriducibile, ovvero l'ideale $\mathfrak{J}(V(f))$ è primo? Se $\mathfrak{J}(V(f)) = (f)$, cioè se ogni polinomio nullo su f è

multiplo di f, la risposta è affermativa perché (f) è un ideale primo (in virtú della fattorialità dell'anello A). Ora se K è un'estensione algebricamente chiusa di k e $V(f)$ viene esteso a K^n, l'uguaglianza $\mathfrak{J}(V(f)) = (f)$ è vera, come si può vedere sfruttando un lemma di eliminazione già invocato in piú di un'occasione. Tuttavia tale uguaglianza è un caso particolare del molto piú generale teorema degli zeri di Hilbert (detto anche *Nullstellensatz* forte):

TEOREMA (Hilbert). *Se K è un'estensione algebricamente chiusa di k, per ogni ideale $\mathfrak{J}$ di A il radicale di $\mathfrak{J}$, cioè l'ideale degli $x \in A$ tali che $x^n \in \mathfrak{J}$ per almeno un $n \geq 1$, coincide con $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{J}))$.*

Se $\mathfrak{J}$ è un ideale primo, dunque coincidente con il proprio radicale, si ha allora $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(V(\mathfrak{J}))$ e in particolare $\mathfrak{J}(V(f)) = (f)$ per ogni polinomio irriducibile f. Il teorema degli zeri forte è conseguenza del cosiddetto teorema degli zeri debole che si enuncia cosí:

TEOREMA. *Ogni ideale proprio $\mathfrak{J}$ di $k[x_1, ..., x_n]$ ha zeri in K^n, cioè $V(\mathfrak{J}) \neq \emptyset$ ($\emptyset$ è l'insieme vuoto).*

Si possono dare svariatissime dimostrazioni di questo teorema, tuttora oggetto di indagini quando K non è un'estensione algebricamente chiusa di k, caso in cui si possono ottenere soltanto risultati con validità meno generale.

Una notevole conseguenza del *Nullstellensatz* è che, se $\mathfrak{J}$ è un ideale massimale, allora $V(\mathfrak{J})$ è un punto; questo fatto, vero quando K sia algebricamente chiuso, è falso in generale, come si può vedere considerando l'ideale massimale di $\mathbf{R}[x, y]$ generato dai polinomi x^2+1 e y^2+1 (sopra $\mathbf{R}$ definisce l'insieme vuoto e sopra $\mathbf{C}$ i punti $(\pm i, \pm i)$, sicché non è piú massimale).

Se V è una varietà irriducibile l'anello quoziente $k[V] = A/\mathfrak{J}(V)$ (anello delle coordinate o delle funzioni polinomiali di V) è un dominio di integrità (cioè privo di divisori di 0) e si può considerare il grado di trascendenza su k del suo corpo delle frazioni $k(V)$. Questo grado di trascendenza è un numero intero d $(0 \leq d \leq n)$ che definisce in modo preciso quella nozione di «grado di libertà» di cui si è parlato relativamente alle superfici e alle curve dello spazio; è dunque naturale definire l'intero d «dimensione della varietà V». La nozione di dimensione può essere definita anche in modo piú algebrico, applicabile a un anello noetheriano qualsiasi, basandosi sulla teoria delle catene d'ideali primi introdotta da Krull.

Si può cosí definire con tutta generalità una curva algebrica irriducibile come una varietà algebrica di dimensione 1. E allora, tornando un momento indietro, si pone questo problema relativamente alle curve dello spazio ordinario: è vero che ogni curva C dello spazio ordinario k^3 è intersezione di due superfici f e g? Questo è tuttora un problema aperto; vi è un'antica congettura per una risposta affermativa, ma si conoscono solo risultati parziali come il seguente: ogni curva di k^3 può ottenersi come intersezione di tre superfici. Il problema di cui sopra riguarda le cosiddette «intersezioni complete in senso insiemistico». Ma vi sono problemi interessanti e attuali anche per le «intersezioni complete» (in senso algebrico); solo recentemente è stato ottenuto il seguente risultato:

ogni curva C di k^3 di genere 0 oppure 1 è intersezione completa (algebrica) di due superfici, cioè: esistono due polinomi $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ tali che $\mathfrak{I}(C) = (f, g)$ (ideale generato da f e da g). Quest'ultimo risultato non è assolutamente valido nello spazio proiettivo, dove ad esempio l'estensione proiettiva della cubica gobba data dalle equazioni (4) non è intersezione completa (algebrica) di due superfici.

Una varietà V tale che ogni sua sottovarietà di codimensione 1 (ipersuperficie di V) sia intersezione completa (in senso algebrico) di V con un'altra ipersuperficie si dice «varietà contenente solo intersezioni complete». Una varietà V siffatta può essere caratterizzata algebricamente nel modo seguente: l'anello delle coordinate $k[V]$ è fattoriale; per tal motivo si dice anche, piú brevemente, V è fattoriale (si veda la proprietà g) delle coniche). Anche lo studio delle varietà fattoriali, già condotto con metodi geometrici o trascendenti da Noether, Lefschetz, Severi, è stato ripreso in epoca recente sotto vari aspetti da Samuel, Grothendieck, Deligne assieme ad altri algebristi e geometri e costituisce un esempio particolarmente interessante dei legami che sussistono tra algebra e geometria, livello elementare e livello piú avanzato di uno stesso tipo di tematica ispirata alla geometria algebrica.

Nell'ambito delle varietà algebriche cosí definite si può riprendere la nozione di anello locale di un punto, introdotta nel § 3.2, e discutere algebricamente il concetto di punto singolare e semplice (incontrando però difficoltà molto maggiori che nel caso delle curve piane).

Inoltre, come si sono visti esempi di applicazioni birazionali fra curve, cosí si può introdurre il concetto di applicazione birazionale fra varietà algebriche affini. Da un punto di vista algebrico si considerano le due varietà (irriducibili, per semplicità) V e W definite dagli ideali (radicali) $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{J}$ in $k[x_1, ..., x_n]$ e $k[x_1, ..., x_m]$ rispettivamente; ad esse sono associati i due anelli delle funzioni regolari $B = k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{I}$ e $C = k[x_1, ..., x_m]/\mathfrak{J}$ che, trattandosi di domini di integrità, hanno corpi delle frazioni (cioè delle funzioni razionali) L ed M. Allora un'applicazione birazionale fra V e W altro non è che un isomorfismo fra i corpi L ed M (che tenga fisso k); se poi c'è addirittura un isomorfismo fra gli anelli B e C si dice che le due varietà sono isomorfe; mentre l'applicazione birazionale è biunivoca con qualche eccezione, l'isomorfismo (detto anche applicazione biregolare) non presenta eccezione alcuna.

Due significativi esempi di applicazioni birazionali: normalizzazione e scoppiamento. 1) Sia V una varietà algebrica avente anello delle coordinate $A = k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{I}$ e corpo delle funzioni razionali L. Un elemento x di L si dice intero sopra A se è radice di un'equazione del tipo $x^r + a_1 x^{r-1} + ... + a_r = 0$, dove $a_i \in A$ per ogni i (e il primo coefficiente è 1). Non è difficile verificare che l'insieme $\bar{A}$ di tutti gli elementi di L interi sopra A è un anello intermedio fra A e L, detto normalizzazione (o chiusura integrale) di A. Per il modo stesso in cui è costruito $\bar{A}$, i due anelli A e $\bar{A}$ hanno lo stesso corpo L delle funzioni razionali. Si noti inoltre che, grazie a un risultato di Zariski, $\bar{A}$ si può scrivere nella forma: $k[x_1, ..., x_m]/\mathfrak{J}$, dove $\mathfrak{J}$ è un ideale primo. Ciò significa che $\bar{A}$ è

ancora l'anello delle coordinate di una varietà algebrica W detta normalizzazione di V. Pertanto si può affermare che V e W sono due varietà algebriche in corrispondenza birazionale. Applicando tale procedimento a W si verifica che la normalizzazione di W è ancora W.

Si supponga ora per semplicità $k = \mathbf{C}$ e sia $P = (a_1, ..., a_n)$ un punto di V; si può dimostrare che esiste un numero finito di punti di W corrispondenti di P; in generale tale gruppo di punti si ridurrà a un punto solo, ma ci sono eccezioni a questo fatto. Se invece P' è un punto di W, esso ha certamente uno ed un solo corrispondente sopra V. In queste condizioni si dirà che la normalizzazione dà un «morfismo» di W sopra V, nel senso che su W non ci sono punti privi d'immagini o con piú di un'immagine (pur essendovene nel senso inverso, cioè nel passaggio da V a W). Esempio: l'anello $k[t^2, t^5]$ (dove t è una variabile) è isomorfo all'anello delle coordinate della quintica piana di equazione $y^2 = x^5$ e il suo corpo delle frazioni è $L = k(t)$; chiaramente t è intero sopra $k[t^2, t^5]$, in quanto t^2 appartiene a $k[t^2, t^5]$; sulla base di tale osservazione si può vedere che la normalizzazione di $k[t^2, t^5]$ è l'anello $k[t^2, t^5, t] = k[t]$, cioè l'anello delle coordinate di una retta.

2) Si è visto nel § 3.3 che le trasformazioni quadratiche possono migliorare o far scomparire le singolarità di una curva piana. Una loro variante (molto piú potente) è lo «scoppiamento» (strumento sistematicamente utilizzato da Zariski e Hironaka; cfr. § 6.5). Si consideri il caso della quintica piana di equazione $y^2 = x^5$, con anello delle coordinate $A[x, y]/(y^2 - x^5) = k[u, v]$ (dove u = immagine di x, v = immagine di y). L'anello $B = k[u, v, v/u] = k[x, y, y/x]/((y/x)^2 - x^3)$ è lo scoppiamento di A con centro nel punto $O = (0, 0)$, corrispondente all'ideale (x, y). Ponendo $y/x = z$ cioè applicando la trasformazione $x = x$ e $y = xz$, si può anche riscrivere $B = k[x, z]/(z^2 - x^3)$; quest'ultima scrittura (nelle variabili x e z) fa capire che B è l'anello delle coordinate di una nuova curva di equazione $z^2 - x^3 = 0$. La curva di anello A ha un punto doppio in O e cosí pure la curva di anello B. Ma se si applica un secondo scoppiamento, ponendo $z/x = w$, si ottiene l'anello $C = k[x, w]/(w^2 - x)$, cioè l'anello delle coordinate della parabola $x = w^2$, che ha nell'origine (e in ogni altro punto) un punto semplice.

Pertanto due scoppiamenti successivi permettono di far scomparire la singolarità. Si noti che il metodo della normalizzazione consente ugualmente e in un solo passo di far scomparire i punti singolari; tuttavia esso «salta» in certo senso i punti singolari del primo scoppiamento, per passare subito al secondo, con ciò impedendo l'analisi delle singolarità intermedie (o infinitamente vicine: cfr. § 3.3). Nel § 6.5 si riprenderanno questi concetti da un punto di vista piú generale.

Le varietà ora considerate sono affini e fra queste c'è lo spazio affine $\mathbf{A}^n(k)$ corrispondente all'ideale $\mathfrak{I} = (0)$. Se si studiano invece le varietà proiettive occorre considerare l'anello dei polinomi $k[x_0, ..., x_n]$ in $n+1$ variabili; i punti sono le $(n+1)$-uple di elementi di k a meno di un fattore moltiplicativo non nullo, le equazioni delle varietà proiettive si ottengono annullando i polinomi

omogenei, ecc. Nell'ambiente proiettivo si possono definire le applicazioni birazionali, la normalizzazione, lo scoppiamento; si discuterà di tali questioni piú in dettaglio nei §§ 6.2 e 6.5, quando si farà uso di nozioni topologiche finora escluse. In effetti uno dei «grandi balzi» della geometria algebrica moderna consiste nell'introduzione di metodi topologici, collegati alla cosiddetta «topologia di Zariski», che ha significato sopra un corpo base qualunque e sostituisce la topologia ordinaria indotta sopra una varietà algebrica dall'immersione in $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ o $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, che ha pure notevole importanza nello studio della geometria algebrica con metodi «trascendenti» (cfr. §§ 6.2 e 6.4).

4. *Topologia.*

4.1. Topologia generale.

Il problema del passaggio al limite e quello della continuità erano sentiti già nell'antichità; ad essi è collegata una delle dicotomie fondamentali dell'esperienza umana: quella continuo/discreto. Anche se alcuni invarianti topologici (in particolare quelli connessi con i poliedri) sono già stati introdotti da Eulero nel Settecento, il primo ad affrontare coscientemente il problema topologico è Riemann il quale afferma: «Nello studio delle funzioni che si ottengono con l'integrazione dei differenziali esatti, qualche teorema di *analysis situs* è quasi indispensabile. Sotto questo nome, usato da Leibniz in un senso leggermente diverso, è possibile designare quella parte della teoria delle grandezze continue che studia queste grandezze non come indipendenti dalla loro posizione e misurabili le une per mezzo delle altre, bensí facendo astrazione da qualsiasi idea di misura, e studiando solo i rapporti di posizione e di inclusione» [1857, p. 105].

Quarant'anni dopo, Poincaré, in un lavoro fondamentale per lo sviluppo ulteriore della topologia algebrica e differenziale, afferma: «Si è molto spesso ripetuto che la Geometria è l'arte di ben ragionare su figure mal fatte; tuttavia tali figure, per non ingannarci, devono soddisfare a determinate condizioni; le proprietà possono essere alterate in modo grossolano, ma le posizioni relative delle diverse parti non devono essere capovolte. L'uso delle figure ha dunque innanzitutto lo scopo di farci conoscere determinate relazioni tra gli oggetti studiati, e tali relazioni sono quelle di cui si occupa un ramo fondamentale della geometria, detto *analysis situs*, nel quale si descrive la situazione relativa dei punti, delle linee e delle superfici, senza alcuna considerazione per la loro grandezza» [1895, p. 2].

Intorni. La prima caratteristica da considerare in tale contesto è quella della vicinanza dei punti; è proprio per tale motivo che Hilbert nel 1902 introduce (seppure in modo ristretto al problema considerato) la nozione di intorno indicando chiaramente che essa va assunta a fondamento per una trattazione assiomatica dell'*analysis situs*. Tale nozione viene ripresa da Hausdorff

nei *Grundzüge der Mengenlehre* [1914]: una topologia $\mathcal{T}$ sull'insieme E viene definita assegnando per ogni punto $x \in E$ la famiglia $\mathfrak{U}(x)$ degli intorni di x, e cioè una famiglia di sottoinsiemi di E tali che

1) per ogni $U \in \mathfrak{U}(x)$ risulta $x \in U$;
2) ogni sottoinsieme di E che contiene un insieme della famiglia $\mathfrak{U}(x)$ è in $\mathfrak{U}(x)$;
3) ogni intersezione finita d'insiemi di $\mathfrak{U}(x)$ è in $\mathfrak{U}(x)$;
4) se $U \in \mathfrak{U}(x)$ esiste un insieme $W \in \mathfrak{U}(x)$ tale che per ogni $y \in W$ risulta $U \in \mathfrak{U}(y)$.

Agli assiomi precedenti Hausdorff aggiunge l'assioma di separazione (o di Hausdorff):

5) se $x \neq y$ sono due elementi di E esistono un intorno di x e un intorno di y aventi intersezione vuota.

In realtà, per assegnare la topologia su E basta assegnare un sistema fondamentale di intorni di ogni punto $x \in E$, e cioè una famiglia di intorni di x tale che per ogni intorno V di x esista W in tale famiglia con $W \subset V$.

Esempio 1.

Sia $E = \mathbf{R}$; allora la topologia usuale su $\mathbf{R}$ si ottiene assumendo come sistema fondamentale di intorni di ogni punto x gli intervalli $(x - 1/n,\ x + 1/n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tale topologia è separata.

Esempio 2.

Sia $E = \mathbf{R}^m$, i cui elementi sono $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$; la topologia usuale è indotta dalla metrica euclidea: un sistema fondamentale di intorni di x è formato da $B_m(x; \delta) = \{z \in \mathbf{R}^m \mid \|z - x\| < \delta\}$ ove $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ e $\|w\| = (w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_m^2)^{1/2}$. Si tratta di una topologia separata. Identificando $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}^2$ si ottiene la usuale topologia su $\mathbf{C}$.

Esempio 3.

Si dice che E è uno spazio metrico quando su E è definita una distanza e cioè una applicazione di $E \times E$ in $\mathbf{R}$ tale che

1) $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$	per ogni $x, y \in E$
2) $d(x, y) = 0$	se e solo se $x = y$
3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$	(disuguaglianza triangolare).

Se E è uno spazio metrico si può definire la topologia indotta dalla metrica d, assumendo come sistema fondamentale di intorni di x la famiglia di insiemi $B(x; \delta) = \{z \in E \mid d(x, z) < \delta\}$ ove $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Negli esempi 1 e 2 (ove $d(x, z) = \|x - z\|$) e nella maggior parte degli spazi funzionali (ad esempio quelli di Hilbert e di Banach) la topologia è indotta da una metrica. Per tale motivo negli anni 1920-30 la scuola polacca (Lusin, Souslin, Banach) e la scuola di Mosca (Aleksandrov, Tihonov, Smirnov) studiarono approfonditamente la topologia di uno spazio metrico al fine di trovare condizioni necessarie e suffi-

cienti affinché una topologia sia metrizzabile; particolarmente significativo fu il criterio di Nagata-Smirnov. Tuttavia, «come spesso accade nella storia della matematica, sembra che l'importanza del problema della metrizzazione risieda non tanto nella sua soluzione quanto nelle nuove nozioni delle quali esso ha favorito lo sviluppo» [Bourbaki 1960, trad. it. p. 170].

Esempio 4.

Si possono sempre definire almeno due topologie su di un insieme E: quella (ovviamente non separata) per la quale il solo intorno di x è tutto E; e la topologia discreta (ovviamente separata) per la quale tutti i sottoinsiemi di E che contengono x sono intorni di x. Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due topologie definite su E, si dice che $\mathcal{T}_1$ è piú fine di $\mathcal{T}_2$ se per ogni $x \in E$ tutti gli intorni di x per $\mathcal{T}_2$ sono anche intorni di x per $\mathcal{T}_1$; ciò significa che la topologia $\mathcal{T}_1$ ha «piú intorni» della topologia $\mathcal{T}_2$ e quindi distingue meglio fra di loro i punti di E.

Esempio 5.

La topologia di Zariski (cfr. § 6.2) costituisce un significativo esempio di topologia non separata.

Sia A un sottoinsieme non vuoto di E; gli intorni di $x \in A$ per la topologia indotta da E sono le intersezioni con A degli intorni di x per la topologia di E. Un sottospazio di uno spazio separato è separato.

A partire dagli intorni si definiscono gli insiemi aperti della topologia $\mathcal{T}$: un sottoinsieme A di E è aperto se per ogni $x \in A$ esiste un intorno di x completamente contenuto in A; l'insieme vuoto è aperto. Gli insiemi chiusi di $\mathcal{T}$ sono i complementari degli insiemi aperti. Una topologia può anche essere introdotta definendo gli aperti, oppure i chiusi, mediante opportuna assiomatica (in pratica si userà una base degli aperti): cfr. il § 3.4 dell'articolo «Applicazioni» di questa stessa *Enciclopedia*.

Trovano la loro naturale formulazione nell'ambito topologico molte proprietà messe in evidenza per i numeri reali e per le funzioni reali di variabile reale dai matematici dell'Ottocento.

Continuità. Sia f un'applicazione di E in F. Si dice che f è continua in x_0, rispetto alla topologia $\mathcal{T}$ di E ed a quella $\mathcal{T}'$ di F, se per ogni intorno V di $f(x_0)$ in F esiste un intorno U di x_0 in E tale che $f(U) \subset V$. La funzione è poi detta continua in E se è continua per ogni x_0 di E; se f inoltre è biiettiva ed f^{-1} è anche continua, allora f è un omeomorfismo e gli spazi E ed F sono omeomorfi. L'omeomorfismo è una relazione di equivalenza nell'insieme degli spazi topologici.

Per ogni d reale l'applicazione $t \to (\cos t, \sin t)$ di $[d, d+2\pi]$ su S^1 è continua; tale applicazione è un omeomorfismo se ristretta a $[d, d+2\pi)$ oppure a $(d, d+2\pi]$. S^1 è omeomorfa ad una qualsiasi ellisse del piano di equazione $(x-x_0)^2/a^2+(y-y_0)^2/b^2=1$ con $a, b>0$ mediante l'omeomorfismo $(x, y) \to (x_0+ax, y_0+by)$.

Se si indica con E il complementare del punto $(0, 1)$ in S^1, l'applicazione di E su $\mathbf{R}$ definita da $(x, y) \to x/(1-y)$ è un omeomorfismo: si tratta della proiezione stereografica.

Si può inoltre verificare che S^1 è omeomorfa ad un triangolo, ad un rettangolo e, piú in generale, ad un qualunque poligono i cui lati non s'intersechino.

Compattezza. Una proprietà fondamentale degl'intervalli chiusi e limitati di $\mathbf{R}$ è: «Ogni ricoprimento formato da insiemi aperti contiene un ricoprimento formato da un numero finito di insiemi aperti», che nel seguito verrà indicata con (C). Uno spazio topologico E che verifica tale proprietà (C) è detto quasi-compatto; se inoltre E è separato, allora E è compatto. Un sottoinsieme A di E è quasi-compatto (risp. compatto) se munito della topologia indotta è uno spazio quasi-compatto (risp. compatto). Se E è compatto ogni suo sottoinsieme chiuso è compatto. Ogni prodotto di insiemi compatti è un insieme compatto (teorema di Tihonov). In uno spazio separato ogni insieme compatto è chiuso.

Se f è un'applicazione continua di uno spazio quasi-compatto E in uno spazio topologico F, allora l'immagine $f(E)$ è un insieme quasi-compatto; se F è inoltre separato allora $f(E)$ è un insieme compatto.

Siccome gli intervalli $[d, d+2\pi]$ sono compatti in $\mathbf{R}$, se ne deduce che S^1 è un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^2$ e tali sono anche tutte le circonferenze, tutte le ellissi e tutti i poligoni omeomorfi ad S^1.

In uno spazio metrico tutti gli insiemi compatti sono anche limitati e cioè contenuti in un $B(x; \delta)$ con $\delta < +\infty$.

La proiezione stereografica sopra considerata suggerisce la possibilità di «compattificare» $\mathbf{R}$ aggiungendogli il punto ∞ in modo da rendere tale proiezione stereografica un omeomorfismo di S^1 su $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$; a tal fine basta definire come sistema fondamentale di intorni di ∞ gli insiemi del tipo $\{x \in \mathbf{R} \mid n < |x|\} \cup \{\infty\}$ con $n = 1, 2, \ldots$

Un profondo teorema di Aleksandrov assicura che se E è uno spazio topologico separato tale che ogni punto di E possiede un intorno compatto – è il caso di $\mathbf{R}$: si prenda $[x-1, x+1]$ come intorno di x –, allora esistono uno spazio compatto E' e un omeomorfismo f di E sul complementare di un punto di E'. Uno spazio topologico E che verifica le ipotesi del teorema di Aleksandrov è detto localmente compatto.

Negli spazi $\mathbf{R}^n$ un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato; si tratta pertanto di spazi localmente compatti che possono essere compattificati con l'aggiunta di un punto, il cosiddetto punto all'infinito. $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, che altro non è che la retta proiettiva $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, è omeomorfo ad S^2, la sfera ordinaria a due dimensioni di $\mathbf{R}^3$. $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ diventa omeomorfo alla sfera S^n attraverso la proiezione stereografica.

Connessione. Si tratta di una proprietà fondamentale di un intervallo I di $\mathbf{R}$ cosí caratterizzata: «Per ogni coppia di aperti (o di chiusi) B e C tali che $I \subset B \cup C$, $I \cap B \neq \emptyset$ e $I \cap C \neq \emptyset$, allora $I \cap B \cap C \neq \emptyset$» (che nel seguito verrà indicata con (D)); essa significa intuitivamente che I è «formato da un solo pezzo».

Uno spazio topologico E è detto connesso se non è riunione di due insiemi aperti, non vuoti e disgiunti (cioè con intersezione vuota). Un sottoinsieme I di uno spazio topologico è connesso se verifica (D) e cioè se è connesso per la topologia indotta. Una riunione di insiemi connessi con intersezione non vuota è un insieme connesso; un prodotto di insiemi connessi è connesso.

Se f è un'applicazione continua di E in F, allora per ogni insieme connesso I di E risulta $f(I)$ connesso in F.

La componente connessa di x in E è la piú grande parte connessa di E che contiene x; si tratta di un insieme chiuso.

Uno spazio topologico E è localmente connesso se ogni punto di E ha un sistema fondamentale di intorni connessi; il prodotto di un numero finito di spazi localmente connessi è localmente connesso.

La circonferenza S^1 è connessa, in quanto immagine di un intervallo, e quindi anche ogni altra circonferenza od ellisse. Una iperbole del piano euclideo è un insieme non connesso, ma avente *due* componenti connesse (i due rami dell'iperbole), inoltre un'iperbole non è un insieme compatto; una parabola è un insieme connesso ma non compatto.

Nel piano proiettivo (reale o complesso), però, tutte le coniche (anche degeneri) sono compatte perché sottoinsiemi chiusi di uno spazio compatto; esse sono anche connesse.

Completezza. L'estensione della nozione di successione numerica convergente e di limite è stata proposta nell'ambito degli spazi topologici in due modi distinti (anche se equivalenti) da Moore-Smith nel 1922 e da Weil nel 1937. In particolare Weil ha affrontato il problema della completezza degli spazi topologici ed ha dato una esauriente generalizzazione della costruzione di Cantor dei numeri reali a partire dai numeri razionali, con il procedimento di completamento degli spazi uniformi. Anche l'insieme **Z** può essere topologizzato e completato ottenendo notevoli informazioni sulla teoria dei numeri.

Il problema della classificazione. Come si è visto in precedenza l'omeomorfismo è una relazione di equivalenza fra gli spazi topologici; tuttavia, se si hanno due spazi topologici E ed F, il problema di decidere se essi sono omeomorfi è assai arduo: si deve infatti costruire un omeomorfismo di E su F, oppure, cosa forse ancora piú difficile, dimostrare che non esiste un tale omeomorfismo.

L'approccio a tale problema, sostanzialmente proposto da Poincaré [1895] per generalizzare i risultati fino ad allora ottenuti nel caso delle superfici compatte connesse ed orientabili, e che si è rivelato assai fruttuoso, è il seguente: si supponga di saper associare ad ogni spazio topologico E un gruppo $G(E)$ in modo che un'applicazione continua $f : E \to F$ induca un omomorfismo di gruppi $f_* : G(E) \to G(F)$ verificante le seguenti proprietà funtoriali:

A) all'omeomorfismo identità id_E di E è associato l'isomorfismo identità di $G(E)$;

B) considerata l'applicazione continua $g : F \to H$, risulta $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Una volta costruita tale corrispondenza è facile provare che se $f : E \to F$ è un omeomorfismo, allora $f_* : G(E) \to G(F)$ è un isomorfismo di gruppi. Non vale però in generale il viceversa, nel senso che l'isomorfismo di $G(E)$ con $G(F)$ non implica in generale l'omeomorfismo di E con F.

Si può sperare tuttavia, ed è questo uno degli obiettivi della topologia algebrica, di costruire un numero sufficiente di invarianti (non solo gruppi, ma anche numeri, anelli, ecc.) in modo che E ed F risultino omeomorfi se e solo se tutti i loro invarianti coincidono: tale classificazione è stata realizzata solo per pochissime famiglie di spazi topologici. Ad esempio, Markov ha provato che il problema della classificazione è insolubile per le varietà di dimensione ≥ 4; infatti per ogni gruppo individuato da un numero finito di generatori e relazioni è possibile costruire una varietà a quattro dimensioni avente tale gruppo come primo gruppo di omotopia (cfr. oltre); se si disponesse di un algoritmo per classificare tali varietà, se ne potrebbe dedurre uno per il problema dell'isomorfismo dei gruppi cosí generati, ma questo problema è indecidibile e cioè tale algoritmo non esiste.

Nel seguito si illustreranno due fondamentali costruzioni della topologia algebrica: quella dei gruppi di omotopia e quella dei gruppi di omologia e coomologia, entrambe sostanzialmente introdotte da Poincaré [1895].

4.2. Omotopia.

Siano E ed F due spazi topologici e f_0 ed f_1 due applicazioni continue di E in F. Si dice che f_0 è omotopa ad f_1, e si scrive $f_0 \simeq f_1$, se esiste un'applicazione continua $\Phi : E \times [0, 1] \to F$ tale che $\Phi(x, 0) = f_0(x)$ e $\Phi(x, 1) = f_1(x)$ per ogni x di E. Φ viene detta omotopia di f_0 su f_1. Se s'interpreta $t \in [0, 1]$ come parametro temporale, allora al variare di t fra 0 e 1 l'applicazione f_0 viene deformata con continuità nell'applicazione f_1 passando attraverso le applicazioni continue $f_t : x \to \Phi(x, t)$ di E in F. Se risulta inoltre che $\Phi(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ per ogni $a \in A \subset E$ e per $t \in [0, 1]$ si dice che f_0 ed f_1 sono omotope relativamente ad A.

Due spazi topologici E ed F hanno lo stesso tipo di omotopia se esistono $f : E \to F$ e $g : F \to E$ tali che $f \circ g \simeq \mathrm{id}_F$ e $g \circ f \simeq \mathrm{id}_E$.

L'omotopia è una relazione di equivalenza nello spazio delle applicazioni continue da E in F e il tipo di omotopia è una relazione di equivalenza fra gli spazi topologici. Si tratta però di una relazione «meno precisa» dell'omeomorfismo, in quanto due spazi omeomorfi hanno ovviamente lo stesso tipo di omotopia, ma non viceversa (cfr. l'esempio 1 piú avanti).

Una parte notevole degli invarianti costruiti nell'ambito della geometria algebrica sono invarianti per omotopia e cioè coincidono per spazi E ed F che hanno lo stesso tipo di omotopia, fatto che rende assai complicato il problema della classificazione, anche se in molti casi la classificazione omotopica è sufficiente.

Un sottoinsieme $A \subset E$ è un retratto per deformazione di E se esiste un'applicazione continua $r : E \to A$, detta retrazione, tale che $r(a) = a$ per ogni $a \in A$ e omotopa ad id_E relativamente ad A; E e A hanno allora lo stesso tipo di omo-

topia. Se $\{x_0\}$ è un retratto per deformazione di E, allora E è detto contraibile (nel punto x_0). Se E è contraibile, allora ogni applicazione continua di uno spazio topologico X in E è omotopa a un'applicazione costante.

Esempio 1.

Ogni sottoinsieme convesso $A \neq \emptyset$ di $\mathbf{R}^m$ (e in particolare tutto $\mathbf{R}^m$) è contraibile in ogni suo punto x_0, definendo $\Phi(x, t) = (1-t)x + tx_0$ per ogni $(x, t) \in A \times [0, 1]$. Questo esempio illustra bene quanta informazione si perde passando dall'equivalenza topologica (omeomorfismo) allo stesso tipo di omotopia.

Esempio 2.

La sfera unità S^n è un retratto per deformazione di $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, la retrazione r è data da $r(x) = x/\|x\|$ e l'omotopia tra l'identità di $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ed r è la deformazione radiale $\Phi(x, t) = (1 - t + t/\|x\|)x$.

Esempio 3.

Sia $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Si considerino le applicazioni continue di B_n in sé e ci si domandi se ve ne è qualcuna senza punti fissi (cioè tale che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in B_n$). L'esistenza di una f siffatta implica che S^{n-1} (il bordo di B_n) è un retratto per deformazione di B_n. Infatti per ogni $x \in B_n$ si può definire $r(x) \in S^{n-1}$ come l'intersezione di S^{n-1} con la retta per $f(x)$ e x orientata positivamente da $f(x)$ a x e quindi l'omotopia $\Phi(x, t) = (1-t)r(x) + tx$. Alla luce degli esempi 1 e 2 appare quindi plausibile che ogni applicazione continua di B_n in sé abbia almeno un punto fisso, come in effetti si proverà piú avanti.

Gruppi di omotopia. Una curva (o cammino od arco) da x_0 a x_1 nello spazio topologico E è un'applicazione continua $\alpha : [0, 1] \to E$ con $\alpha(0) = x_0$ e se $x_0 = x_1$ si parla di cappio di punto base x_0. Se α è un cammino da x_0 ad x_1 e β un cammino da x_1 ad x_2, il cammino $\alpha \vee \beta$ da x_0 ad x_2, giustapposizione di α e β, è definito da

$$\alpha \vee \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{per } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Naturalmente non va confuso il cammino α con la sua immagine $\alpha([0, 1]) \subset E$. Lo spazio topologico E è detto connesso per archi se dati due punti qualunque di E vi è un cammino che li congiunge; se E è connesso per archi allora E è connesso, ma non viceversa.

Sia E uno spazio topologico; si indica con $\pi_n(E, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia, relativamente ad $A = \{(1, 0, \ldots, 0)\} \subset S^n$ delle applicazioni $f : S^n \to E$ per cui $f(1, 0, \ldots, 0) = x_0$. In $\pi_n(E, x_0)$ si può introdurre una struttura di gruppo con una procedura che s'illustra qui nel caso $n = 1$. Siano f e g due applicazioni di S^1 in E con $f(1, 0) = g(1, 0) = x_0$; ad esse corrispondono due cappi di punto base x_0 in E ottenuti per composizione con $t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ da $[0, 1]$ su S^1 e quindi si può definire la loro giustapposizione che corrisponde a un'applicazione di S^1 in E indicata con $f \vee g$ tale che $f \vee g(1, 0) = x_0$. Se $[f]$ è la classe di omotopia di f e $[g]$ quella di g allora si pone $[f] \cdot [g] = [f \vee g]$. Si dimostra che rispetto a tale legge di composizione $\pi_n(E, x_0)$ è un gruppo il cui elemento neutro è la classe di omotopia dell'applicazione costante per cui $f(S^n) = \{x_0\}$. Tale gruppo, che è commutativo per $n \geq 2$, viene detto n-esimo gruppo di omotopia di E con punto base x_0.

I gruppi di omotopia sono associati in modo «naturale» allo spazio topologico E nel senso che sono verificate le condizioni A) e B) di p. 660 e inoltre risulta:

a) se $\varphi_0 : E \to F$ e $\varphi_1 : E \to F$ sono omotope relativamente a x_0, allora gli omomorfismi indotti φ_{0*} e φ_{1*} sono gli stessi;
b) ogni classe di cammini omotopi in E congiungenti x_0 e x_1 definisce un isomorfismo fra i gruppi $\pi_n(E, x_0)$ e $\pi_n(E, x_1)$;
c) $\pi_n(E \times F, (x_0, y_0))$ è isomorfo alla somma diretta $\pi_n(E, x_0) \oplus \pi_n(F, y_0)$.

Se ne deduce che quando due spazi hanno lo stesso tipo di omotopia (in particolare sono omeomorfi) allora i corrispondenti gruppi di omotopia sono isomorfi. Inoltre, se A è un retratto per deformazione di E e se i è l'immersione (continua) di A in E, allora i_* è un isomorfismo di $\pi_n(A, x_0)$ su $\pi_n(E, x_0)$ per ogni $x_0 \in A$. Se E è connesso per archi la struttura del gruppo $\pi_n(E, x_0)$ non dipende dal punto base x_0; si scriverà pertanto $\pi_n(E)$.

Il gruppo $\pi_1(E, x_0)$, detto gruppo fondamentale, venne introdotto da Poincaré [1895]. E viene detto semplicemente connesso quando è connesso per archi e inoltre $\pi_1(E)$ è banale, e cioè ridotto al solo elemento neutro; se E è contraibile in un punto allora E è semplicemente connesso. $\pi_1(E, x_0)$, che può non essere commutativo, viene in generale definito mediante un sistema di generatori e di relazioni; per tale motivo Tietze ha posto fin dal 1908 il problema dell'isomorfismo di due gruppi non commutativi individuati da sistemi di generatori e relazioni: si tratta di un esempio di problema di decisione, trattato nel § 2.3 dell'articolo «Dipendenza/indipendenza» di questa stessa *Enciclopedia*.

I gruppi superiori di omotopia furono introdotti da Čech nel 1932 e ripresi da Hurewicz in una serie di lavori (1935-36) che ebbero una grande influenza sullo sviluppo ulteriore della topologia algebrica.

Il problema della determinazione dei gruppi di omotopia è all'origine di moltissime ricerche sia nell'ambito della topologia algebrica (ad esempio Milnor, Quillen) sia in altri rami della matematica.

Topologia dei gruppi lineari. Si indica con $GL(N, \mathbf{C})$ il gruppo lineare delle matrici invertibili di ordine N a coefficienti in $\mathbf{C}$ munito della topologia indotta da $\mathbf{C}^{N^2}$ per la quale ogni matrice quadrata di ordine N è identificata con un vettore con N^2 elementi; tale topologia è compatibile con la struttura di gruppo.

Sia f un'applicazione continua di S^1 in $GL(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ e cioè un cam-

mino chiuso in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Il «numero di allacciamento» o grado di f, indicato con $\deg f$, è il «numero di giri» che tale cammino chiuso percorre intorno all'origine; esso può essere calcolato ad esempio approssimando f con un'applicazione differenziabile g e ponendo $\deg f = (1/2\pi i)\int dg/g$. Si verifica che due applicazioni f_0 ed f_1 continue da S^1 in $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ sono omotope se e solo se $\deg f_0 = \deg f_1$; inoltre per ogni $k \in \mathbf{Z}$ l'applicazione di $z \in S^1$ in $z^k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ha grado k. Tali risultati significano che $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{0\})$ e $\pi_1(S^1)$ sono isomorfi a $\mathbf{Z}$.

Il grado di f può anche essere determinato in altri modi: 1) geometricamente: si approssima $f/|f|$ con un'applicazione differenziabile g di S^1 in sé e per un qualsiasi valore regolare $y \in S^1$ di g si conta – algebricamente, e cioè positivamente, risp. negativamente, quando g conserva, risp. inverte, l'orientamento – il numero dei punti di $g^{-1}(y)$ (cfr. oltre, § 5.2); 2) algebricamente: si approssima f con una serie di Fourier finita $\sum_{n=-k}^{k} a_n z^n$ e si pone $\deg f =$ (numero degli zeri) – (numero dei poli) di tale funzione nel disco $|z| < 1$.

Il fatto che $\pi_1(S^1)$ sia isomorfo a $\mathbf{Z}$ e che B_2 sia contraibile permette (cfr. l'esempio 3) di provare nel caso $n = 2$ il seguente teorema:

TEOREMA DEL PUNTO FISSO (Brouwer, 1912). *Ogni applicazione continua di B_n in sé ha almeno un punto fisso, e cioè un punto x tale che $f(x) = x$.*

Un primo risultato fondamentale nello studio del problema generale delle classi di omotopia delle applicazioni f di S^{n-1} in $GL(N, \mathbf{C})$ è il seguente teorema:

TEOREMA DI PERIODICITÀ (Bott, 1959). *Sia $2N \geq n$; se n è dispari ogni f è omotopa a un'applicazione costante, mentre se n è pari si può definire un intero, $\deg f$, e f_0, f_1 risultano omotope se e solo se $\deg f_0 = \deg f_1$; inoltre per ogni $k \in \mathbf{Z}$ esiste un'applicazione f con $\deg f = k$.*

«Io credo che sia giusto asserire che questo teorema di Bott va considerato come una vera conquista della topologia ed è certamente qualcosa di cui ognuno dovrebbe essere cosciente. L'esistenza del grado è ovviamente abbastanza facile: si tratta di *omologia*; ma il fatto che applicazioni con lo stesso grado possano essere deformate una nell'altra è veramente non banale: si tratta di *omotopia*. Tale fatto è assolutamente non intuitivo, e ci basta solo considerare altri casi di omotopia per vedere quanto siamo fortunati. Per questo le classi di omotopia di applicazioni di sfere in sfere sono straordinariamente complicate ed ancora, in generale, ignote. Lo stesso avviene per le applicazioni $S^{n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$ quando $2N < n$» [Atiyah 1967, p. 239].

Tale teorema è stato recentemente collegato, proprio da Atiyah e Bott, con uno dei risultati piú significativi dell'analisi e della topologia di questi ultimi vent'anni: il teorema dell'indice di Atiyah e Singer (cfr. oltre, § 5.5) per gli operatori ellittici esteso al caso in cui si considerino anche le condizioni al bordo. «Un aspetto interessante di questa connessione è che, cercando di comprendere il significato topologico delle condizioni al bordo, Bott ed io siamo stati ineluttabilmente condotti ad una nuova dimostrazione elementare del teorema di Bott. A mio avviso questa nuova dimostrazione fornisce una chiave per comprendere effettivamente i legami tra operatori ellittici e gruppi lineari» [*ibid.*, p. 242].

I gruppi di omotopia delle sfere. È abbastanza facile dimostrare che $\pi_n(S^n)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}$ utilizzando il grado di un'applicazione di S^n in sé e che sono banali i gruppi $\pi_m(S^n)$ per $m < n$ e $\pi_m(S^1)$ per $m > 1$. Peraltro invece la determinazione di $\pi_m(S^n)$ per $m > n > 1$ è un problema assai complicato e non ancora completamente risolto. In effetti Heinz Hopf ha dimostrato (1931) l'esistenza di un'infinità di classi di applicazioni omotope di S^3 in S^2 caratterizzandole con un invariante, detto poi invariante di Hopf, che può assumere tutti i valori interi: pertanto $\pi_3(S^2)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}$. In tale lavoro Hopf esibisce una decomposizione di S^3 in sottoinsiemi omeomorfi ad S^1, lo spazio dei sottoinsiemi essendo proprio S^2: si tratta del primo esempio di fibrato non banale. Tale risultato venne esteso da Hopf stesso nel 1935 al caso delle classi di omotopia di applicazioni di S^{2n-1} in S^n; in tale occasione Hopf provò che l'invariante numerico da lui costruito assume valori dispari nei casi $n = 2, 4, 8$. Solo nel 1958 Adams riuscí a provare che in tutti gli altri casi l'invariante di Hopf non può assumere valori dispari, risolvendo cosí un problema al quale nel frattempo erano state dedicate molte ricerche.

Successivamente (1937) un certo numero di gruppi di omotopia delle sfere è stato determinato da Freudenthal osservando che S^n si può ottenere, a meno di un omeomorfismo, per *sospensione* dal suo equatore S^{n-1} (e cioè come doppio cono di base S^{n-1} e con i vertici nei due poli di S^n) e quindi provando che l'omomorfismo dei gruppi $\pi_{n+p}(S^n) \to \pi_{n+p+1}(S^{n+1})$ indotto dalla sospensione è un isomorfismo per $n \geq p+2$ ed è suriettivo per $n = p+1$. A partire dai risultati di Hopf su $\pi_{2n-1}(S^n)$ Freudenthal ha potuto cosí calcolare un certo numero di gruppi di omotopia delle sfere.

Nuovi risultati (1951) sul calcolo dei gruppi di omotopia, in particolare delle sfere, vennero ottenuti da Serre il quale, fra l'altro, provò che i gruppi di omotopia della sfera sono gruppi finiti, salvo $\pi_{2n-1}(S^n)$ per n pari (che è somma diretta di un gruppo abeliano libero con un solo generatore e di un gruppo finito) e ovviamente salvo $\pi_n(S^n)$. Lo studio dei gruppi di omotopia delle sfere ha ricevuto nuova attenzione in seguito a loro insospettate applicazioni al problema della biforcazione globale delle orbite periodiche dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie $\dot{x} = f(x, \lambda)$ al variare del parametro reale λ (Alexander-Yorke e Ize, 1974-75).

Altri esempi. Un importante esempio di spazio topologico connesso e compatto è il toro T che può essere approssimativamente descritto come una superficie omeomorfa alla superficie di un anello o di un salvagente; in modo piú preciso il toro può essere definito come *a*) uno spazio topologico omeomorfo al prodotto $S^1 \times S^1$; *b*) uno spazio topologico omeomorfo a $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid [(x^2+y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}$ e cioè l'insieme ottenuto ruotando la circonferenza $(x-2)^2 + z^2 = 1$ nel piano xz intorno all'asse z. Grazie alla proprietà *c*) di p. 663

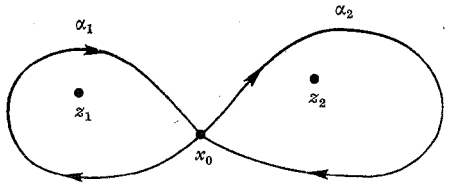


Figura 8.
Due cammini con punto base x_0 nel piano «bucato» in z_1 e z_2.

dei gruppi di omotopia e a quanto già si è visto per $\pi_1(S^1)$ si ricava che $\pi_1(T)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ e cioè è un gruppo abeliano libero con due generatori.

Se si considera una sfera con due manici M (cfr. fig. 7) allora $\pi_1(M)$ è il quoziente del gruppo libero di generatori a_1, b_1, a_2, b_2 modulo il sottogruppo normale generato da $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$; si tratta di un gruppo non commutativo.

Si considerino il piano privato di due punti z_1 e z_2 ed i cammini α_1 e α_2 (fig. 8); $\alpha_1\vee\alpha_2$ non è omotopo a $\alpha_2\vee\alpha_1$.

Qualora E sia un gruppo topologico allora si può dimostrare che $\pi_1(E, x_0)$ è commutativo.

4.3. Omologia e coomologia.

Poincaré introduce anche, nella già citata memoria [1895], il concetto di gruppo di omologia per una varietà; in seguito alle critiche di Heegaard (1898), Poincaré (1899) sostituirà alla nozione un po' imprecisa di varietà, fino ad allora usata, la nozione di poliedro, che verrà assunta a base della topologia combinatoria nell'articolo «Analysis Situs» (1908) scritto da Heegaard in collaborazione con Dehn per l'edizione tedesca dell'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (*Enciclopedia delle scienze matematiche*). L'aspetto algebrico viene però messo in completa evidenza solo nel 1928 da Heinz Hopf sotto lo stimolo di Emmy Noether, e da allora esso diverrà fondamentale in tutto lo sviluppo della teoria.

Complessi simpliciali. Seguendo Hopf, un simplesso chiuso s di dimensione n (o n-simplesso) è l'inviluppo convesso, chiuso e limitato, di $n+1$ punti, detti vertici, affinemente indipendenti in $\mathbf{R}^m$ ($m\geq n$): ad esempio un segmento è un 1-simplesso, un triangolo non degenere è un 2-simplesso, un tetraedro non degenere è un 3-simplesso, ecc. Ogni insieme di $r+1$ vertici ($0\leq r\leq n$) scelti fra gli $n+1$ di un n-simplesso definisce un simplesso r-dimensionale detto lato o faccia del simplesso dato (i vertici sono 0-simplessi). Un simplesso è individuato dall'insieme dei suoi vertici, due simplessi coincidono se hanno gli stessi vertici. Due simplessi sono omeomorfi se esiste una trasformazione lineare affine di uno nell'altro e quindi un n-simplesso è individuato (a meno di omeomorfismi) dalla dimensione.

Un complesso simpliciale K in $\mathbf{R}^m$ è l'unione di un numero finito di simplessi (di dimensione $\leq m$) tali che

1) se s è un simplesso di K allora ogni faccia di s è in K;
2) due simplessi non disgiunti hanno in comune esattamente una faccia.

La dimensione di K, $\dim K$, è la più grande dimensione dei simplessi che compongono K.

È importante sottolineare che un complesso simpliciale K *non* è uno spazio topologico, ma solo un insieme i cui elementi sono simplessi. Il sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$ formato dai punti che appartengono ad almeno uno dei simplessi di K, munito della topologia indotta, è uno spazio topologico compatto e metrizzabile, indicato con $|K|$ e detto anche poliedro con triangolazione K. Ad esempio un n-simplesso s *non* è un complesso simpliciale, ma è possibile associarvi il complesso simpliciale $K(s)$ formato da s e da tutte le facce di s; risulta tuttavia $|K(s)|=s$ come sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$. Si osservi inoltre che per due complessi simpliciali $K\neq L$ può risultare $|K|=|L|$.

Dati due complessi simpliciali K ed L, un'applicazione simpliciale f di K in L è un'applicazione $f:|K|\to|L|$ tale che

1) se a è un vertice di un simplesso di K, allora $f(a)$ è un vertice di un simplesso di L;
2) se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono i vertici di un n-simplesso di K, allora $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)$ generano un simplesso di L;
3) f è lineare affine su ogni simplesso di K.

Le applicazioni simpliciali sono quindi applicazioni continue di $|K|$ in $|L|$ che conservano la struttura simpliciale. Il fondamentale teorema di approssimazione simpliciale afferma che ogni applicazione continua di $|K|$ in $|L|$ può essere approssimata, in modo preciso quanto si vuole, da un'applicazione simpliciale di $|K^{(r)}|$ in $|L|$, ove $K^{(r)}$ è un complesso simpliciale ottenuto per suddivisione baricentrica opportuna dei simplessi di K e quindi $|K^{(r)}|=|K|$.

L'importanza dei simplessi e dei complessi simpliciali in topologia è molto grande; in effetti, secondo Aleksandrov, si può formulare «*il* problema fondamentale della teoria topologica degli insiemi nel modo seguente: *Determinare la struttura di quegli insiemi che si possono collegare col materiale intuitivo fornito dalla topologia elementare dei poliedri, e che perciò sono suscettibili di essere considerati come figure geometriche, sia pure nel senso più generale della parola.* Vien da sé che questa formulazione del problema ne implica un altro e cioè il problema dello studio sistematico delle strutture del tipo richiesto. Tale studio deve essere basato su quelle proprietà che permettono di riconoscere effettivamente il collegamento menzionato, rendendo possibile, di conseguenza, la geometrizzazione dei concetti più generali della teoria degli insiemi» [in Hilbert e Cohn-Vossen 1932, trad. it. p. 453].

Una triangolazione dello spazio topologico E è costituita da un complesso simpliciale K e da un omeomorfismo $\varphi:|K|\to E$, munito della triangolazione K, lo spazio E viene detto triangolato. La «struttura simpliciale» di E non di-

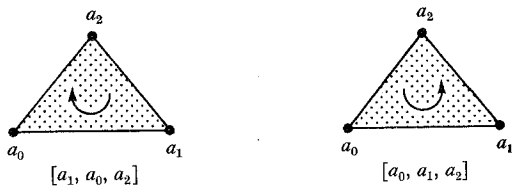


Figura 9.
Due 2-simplessi con orientamento opposto.

pende dalla triangolazione. Ogni superficie compatta è triangolarizzabile con un complesso simpliciale di dimensione 2.

Gruppi di omologia. Un n-simplesso ordinato ($n \geq 1$) è definito dagli $n+1$ vertici assegnati in un certo ordine (fig. 9); due simplessi ordinati sono equivalenti qualora i vertici di uno si deducano da quelli dell'altro con una permutazione pari. Per passaggio al quoziente si ottiene la definizione di n-simplesso chiuso orientato indicato con $[s] = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Gli 0-simplessi hanno solo una orientazione. Un complesso simpliciale i cui simplessi sono tutti orientati è detto complesso simpliciale orientato.

Dati il complesso simpliciale orientato K e il gruppo abeliano G (in generale G è $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ oppure $\mathbf{Z}_2$), il gruppo $C_p(K; G)$ delle p-catene di K a coefficienti in G è, per $0 \leq p \leq \dim K$, l'insieme delle combinazioni lineari formali

$$\sum_s g_s[s] \qquad \text{con } g_s \in G$$

ove la somma è estesa a tutti i p-simplessi orientati di K con la convenzione che $g_s[a_0, a_1, \ldots, a_p] + g_s[a_1, a_0, \ldots, a_p] = 0$. Se $p = \dim K + 1$ allora $C_p(K; G) = 0$.

Se G è un corpo commutativo, allora $C_p(K; G)$ è uno spazio vettoriale su G la cui dimensione è il numero dei p-simplessi di K.

Sia $[s] = [a_0, a_1, \ldots, a_{p+1}]$ un $(p+1)$-simplesso orientato, allora il bordo $\partial_{p+1}[s]$ di $[s]$ è la p-catena definita da

$$\partial_{p+1}[s] = [a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}] - [a_0, a_2, \ldots, a_{p+1}] + [a_0, a_1, a_3, \ldots, a_{p+1}] + \ldots + \\ + (-1)^{p+1}[a_0, a_1, \ldots, a_p].$$

Ad esempio $\partial_1[a_0, a_1] = [a_1] - [a_0]$, $\partial_2[a_0, a_1, a_2] = [a_1, a_2] - [a_0, a_2] + [a_0, a_1] = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + [a_2, a_0]$ (cfr. fig. 10).

L'applicazione bordo $\partial_{p+1}\colon C_{p+1}(K; G) \to C_p(K; G)$ è l'omomorfismo di gruppi definito da $\partial_{p+1}(\Sigma g_s[s]) = \Sigma g_s \partial_{p+1}[s]$ e gode della proprietà $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ per ogni $p \geq 0$. Si possono pertanto definire i gruppi:

$$Z_p(K; G) = \{c \in C_p(K; G) \mid \partial_p c = 0\}$$
$$B_p(K; G) = \{d \in C_p(K; G) \mid \text{esiste } c \in C_{p+1}(K; G) \text{ con } \partial_{p+1} c = d\}$$
$$H_p(K; G) = Z_p(K; G)/B_p(K; G)$$

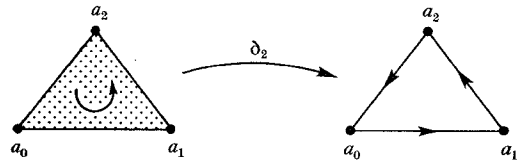


Figura 10.
L'operazione bordo su $[a_0, a_1, a_2]$.

per $0 \leq p \leq \dim K$ con la convenzione che $C_{-1}(K; G) = 0$ e che $\partial_0 = 0 = \partial_{\dim K+1}$. Gli elementi di $Z_p(K; G)$ sono detti p-cicli a coefficienti in G; quelli di $B_p(K; G)$ sono detti p-bordi a coefficienti in G, $H_p(K; G)$ è il p-esimo gruppo di omologia di K a coefficienti in G. Se $G = \mathbf{Z}$ si scrive solo $C_p(K)$, $Z_p(K)$, ecc. Si scriverà ∂ invece di ∂_p quando non vi è pericolo di confusione. Per definizione di gruppo quoziente, due p-cicli a coefficienti in G, siano c_1 e c_2, sono omologhi (e si scrive $c_1 \sim c_2$) se $c_1 - c_2$ è un p-bordo e cioè se esiste una $(p+1)$-catena d tale che $\partial_{p+1} d = c_1 - c_2$.

Se E è uno spazio topologico triangolato da K, il p-esimo gruppo di omologia di E a coefficienti in G, indicato con $H_p(E; G)$, è $H_p(K; G)$. Usando il teorema di approssimazione simpliciale, si dimostra che i gruppi di omologia sono associati in modo «naturale» allo spazio topologico triangolarizzabile E nel senso che sono verificate le condizioni A) e B) di p. 660 e inoltre, se φ_0 e φ_1 sono due applicazioni omotope di E in F, allora gli omomorfismi indotti da $H_p(E; G)$ in $H_p(F; G)$ sono gli stessi. Se ne deduce che quando due spazi topologici triangolarizzabili E ed F hanno lo stesso tipo di omotopia (in particolare sono omeomorfi), allora i corrispondenti gruppi di omologia sono isomorfi.

Siccome $H_p(E; G)$ è un gruppo commutativo finitamente generato, esso è la somma diretta di un numero finito di gruppi abeliani liberi a un solo generatore (isomorfi a $\mathbf{Z}$) e di un numero finito di gruppi ciclici di ordine finito. Il numero dei fattori isomorfi a $\mathbf{Z}$ è detto rango di $H_p(E; G)$ ed è per definizione il p-esimo numero di Betti di E, mentre gli ordini dei gruppi ciclici finiti sono i coefficienti di torsione p-dimensionali. I gruppi di omologia di $|K|$ sono calcolabili in un numero finito di passi con un procedimento effettivo introducendo la cosiddetta base standard di K. Tale risultato implica quindi la possibilità di verificare in un numero finito di passi se due spazi topologici triangolarizzabili E ed F hanno gruppi di omologia *non* isomorfi, nel qual caso E ed F *non* sono omeomorfi; cfr. anche la congettura di Poincaré a p. 672.

I gruppi di omologia $H_p(E; G)$ con G gruppo abeliano qualunque possono essere calcolati a partire dal caso $G = \mathbf{Z}$ grazie a un teorema di Eilenberg-MacLane (1941). In particolare se G è un corpo commutativo (ad esempio $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$) risulta $H_p(E; G) = H_p(E) \otimes_{\mathbf{Z}} G$, e quindi i numeri di Betti coincidono con la dimensione, su G, dei G-spazi vettoriali $H_p(E; G)$.

Gruppi di coomologia. Anche se i gruppi di omologia a coefficienti interi furono introdotti da Poincaré, lo studio dei gruppi duali è iniziato molto piú recentemente, intorno al 1935, per opera soprattutto di Alexander, Čech e Whitney. Ciò è comprensibile poiché il contenuto intuitivo di questi gruppi duali è molto meno evidente, anche se attualmente il concetto di dualità svolge un ruolo preponderante in molti ragionamenti matematici (cfr. l'articolo «Dualità» di questa stessa *Enciclopedia*). Precisamente, il gruppo abeliano delle p-cocatene del complesso simpliciale K a coefficienti nel gruppo abeliano G è l'insieme $C^p(K; G) = \mathrm{Hom}(C_p(K), G)$ di tutti gli omomorfismi di $C_p(K)$ in G. Ogni p-cocatena è quindi individuata quando se ne conosce il valore sui p-simplessi di K che formano un sistema di generatori per $C_p(K)$, il valore della p-cocatena σ^p sul p-simplesso orientato s_p è indicato con (σ^p, s_p): è un elemento di G.

L'operazione bordo ∂_p ammette un'operazione trasposta, detta cobordo, $d_{p-1} : C^{p-1}(K; G) \to C^p(K; G)$ che viene definita sulla $(p-1)$-cocatena σ^{p-1} ponendo, per ogni p-simplesso s_p, $(d_{p-1}\sigma^{p-1}, s_p) = (\sigma^{p-1}, \partial_p s_p)$. È facile verificare che $d_{p+1} \circ d_p = 0$; definendo il gruppo $Z^p(K; G)$ dei p-cocicli come il sottogruppo delle p-cocatene con cobordo nullo e il sottogruppo $B^p(K; G)$ dei cobordi delle $(p-1)$-cocatene, allora viene detto p-esimo gruppo di coomologia il loro quoziente $H^p(K; G) = Z^p(K; G)/B^p(K; G)$. Nel caso in cui G sia un corpo commutativo si verifica che lo spazio vettoriale $H^p(K; G)$ è il G-duale di $H_p(K; G)$; si tratta di spazi vettoriali di dimensione finita.

In modo analogo a quanto fatto per i gruppi di omologia si può definire il gruppo $H^p(E; G)$ per uno spazio topologico con triangolazione K e si hanno proprietà analoghe a quelle dei gruppi di omologia.

Le proprietà algebriche astratte dei gruppi di omologia e di coomologia trovano una naturale formalizzazione nell'ambito delle categorie e dei funtori introdotti in questo contesto da Eilenberg e MacLane (1945) e poi ampiamente usati nella matematica moderna (cfr. gli articoli «Assioma/postulato» e «Funzioni» di questa stessa *Enciclopedia*).

La caratteristica di Eulero-Poincaré. Sia E uno spazio topologico triangolarizzato dal complesso simpliciale K; la caratteristica di Eulero-Poincaré di E è il numero intero

$$\chi(E) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \dim H_p(E; \mathbf{R}) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \dim H^p(E; \mathbf{R})$$

ove $\dim H_p(E; \mathbf{R})$ è la dimensione su $\mathbf{R}$ dello spazio vettoriale reale $H_p(E; \mathbf{R})$ uguale a $\dim H^p(E; \mathbf{R})$ – poiché i due spazi sono duali uno dell'altro – e uguale al p-esimo numero di Betti di E. Un risultato assai significativo dovuto a Poincaré è il seguente:

$$(1) \qquad \chi(E) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \alpha_p(K)$$

dove $\alpha_p(K)$ è il numero dei p-simplessi di K, e cioè $\dim C_p(K; \mathbf{R})$.

Ad esempio, se E è una superficie compatta, $\chi(E) = F - S + V$ ove F, S, V indicano rispettivamente il numero delle facce, degli spigoli e dei vertici della triangolazione K; nel caso dei poliedri è questo il teorema di Eulero (1750) dal quale è possibile dedurre che esistono solo cinque poliedri regolari: tetraedro, cubo (o esaedro), ottaedro, dodecaedro ed icosaedro (si tratta dei cosiddetti solidi platonici, perché già noti a Platone, che attribuí loro una grande importanza nella sua teoria delle idee); per essi, e piú in generale per ogni superficie omeomorfa alla sfera, risulta $\chi(E) = 2$, mentre per una sfera con g manici (cfr. p. 647) risulta $\chi(E) = 2(1-g)$: per il toro si ha quindi $\chi(E) = 0$.

I gruppi di omologia, e cioè i numeri di Betti, determinano completamente le classi di omeomorfismo per le superfici compatte, connesse ed orientabili; come osserva Poincaré in dimensione superiore «affinché due varietà chiuse siano omeomorfe non basta dunque che esse abbiano gli stessi numeri di Betti» «e questo fatto ci mostra quanto le questioni di *Analysis situs* si complicano quando il numero delle dimensioni aumenta» [1895, pp. 83, 71].

La caratteristica di Eulero-Poincaré può essere considerata in contesti diversi (cfr. §§ 6.1 e 6.4); essa è stata generalizzata da Lefschetz (1926) nel modo seguente: sia f un'applicazione continua di E in sé e sia f_{*p} l'endomorfismo indotto in $H_p(E; \mathbf{R})$; allora il numero di Lefschetz di f è

$$L(f) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \operatorname{tr}(f_{*p})$$

ove $\operatorname{tr}(f_{*p})$ è la traccia dell'endomorfismo f_{*p}. Un teorema di Hopf assicura che

$$L(f) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \operatorname{tr}(f_p)$$

qualora f_p sia un endomorfismo di $C_p(E; \mathbf{R})$ che induce f_{*p} su $H_p(E; \mathbf{R})$. Se f è l'identità di E, allora $L(f) = \chi(E)$; la formula di Hopf coincide allora con la formula (1) di Poincaré. Il teorema del punto fisso di Lefschetz, generalizzazione di quello di Brouwer, afferma che se f è omotopa ad un'applicazione senza punti fissi allora $L(f) = 0$. Lefschetz ha inoltre dimostrato l'uguaglianza di $L(f)$ con la somma degli «indici» dei punti fissi di f: è la cosiddetta formula del punto fisso di Lefschetz ulteriormente ripresa (1966) da Atiyah e Bott nell'ambito dei complessi ellittici.

Calcolo di alcuni gruppi di omologia. Se r è il numero delle componenti connesse di E, allora $H_0(E)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}^r$ giacché due 0-cicli sono omologhi se appartengono alla stessa componente connessa della triangolazione K di E.

Siccome S^1 può essere triangolato come bordo di un 2-simplesso, risulta $H_1(S^1) = C_1(S^1)$; peraltro gli 1-simplessi della triangolazione possono essere orientati in modo che $\sum_s [s]$ sia un ciclo. Se ne deduce che $\sum_s g_s[s]$ è un ciclo se e solo se $g_s = g_t$ per qualunque s, t e quindi $C_1(S^1)$ è generato da $\sum_s [s]$. $H_1(S^1)$ è dunque un gruppo abeliano libero con un solo generatore, isomorfo pertanto a $\mathbf{Z}$.

In modo analogo si verifica che $H_n(S^n)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}$; risulta inoltre $H_p(S^n)=0$ per $1 \leq p \leq n-1$ estendendo la seguente dimostrazione del caso $n=2$, $p=1$: ogni cammino chiuso su S^2 è un bordo e quindi omologo a zero.

Ricordando che la retta proiettiva reale è omeomorfa ad S^1, se ne ricavano i gruppi di omologia; per il piano proiettivo reale si ottiene: $H_1(\mathbf{P}^2(\mathbf{R}))$ isomorfo a $\mathbf{Z}_2$ mentre il secondo gruppo è banale.

Per quanto riguarda gli spazi proiettivi complessi, risulta $H_p(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))=0$ per $1 \leq p \leq 2n-1$ dispari e $H_p(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ isomorfo a $\mathbf{Z}$ per $0 \leq p \leq 2n$ pari; il caso $n=1$ segue dai calcoli fatti per S^2, che è omeomorfa alla retta proiettiva complessa.

Il calcolo dei gruppi di omologia di B_n non presenta difficoltà, e si ottiene $H_p(B_n)=0$ per $1 \leq p \leq n$. Confrontando tale risultato con quello ottenuto per S^n si ricava che B_n e S^{n-1} *non* hanno lo stesso tipo di omotopia e quindi una dimostrazione del teorema del punto fisso di Brouwer per confronto con quanto detto nell'esempio 3 di p. 662.

Se E è una varietà compatta, connessa e orientabile di dimensione n, allora $H_n(E)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}$, altrimenti è banale; in ogni caso però $H_n(E; \mathbf{Z}_2)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Piú in generale il teorema di dualità di Alexander-Poincaré assicura che, se E è orientabile, allora $H_p(E)$ è isomorfo ad $H^{n-p}(E)$, mentre in ogni caso risulta $H_p(E; \mathbf{Z}_2)$ isomorfo a $H^{n-p}(E; \mathbf{Z}_2)$.

Il teorema di Hurewicz (1941). Nel caso in cui lo spazio topologico triangolarizzabile E sia connesso per archi Hurewicz ha fornito il seguente metodo generale per collegare i gruppi di omotopia $\pi_n(E)$ con i gruppi di omologia $H_n(E)$ per $n \geq 1$. Sia $f: S^n \to E$ un rappresentante della classe di omotopia $\alpha \in \pi_n(E)$; si definisce allora $h_n(\alpha)=f_{*n}(\sigma_n)$ ove σ_n è un generatore di $H_n(S^n)$ e f_{*n} è l'omomorfismo di $H_n(S^n)$ in $H_n(E)$ indotto da f. Si verifica che h_n è un omomorfismo di $\pi_n(E)$ in $H_n(E)$; nel caso $n=1$ esso è suriettivo e il suo nucleo è il sottogruppo dei commutatori di $\pi_1(E)$. Se risulta inoltre $\pi_r(E)=0$ per $1 \leq r < n$, allora h_n è un isomorfismo. Il teorema di Hurewicz permette di determinare molti gruppi di omotopia, riducendo tale problema a quello di carattere combinatorio, e quindi piú semplice, del calcolo dei gruppi di omologia.

La congettura di Poincaré. Come si è visto in precedenza, tutte le superfici compatte, orientabili e semplicemente connesse sono omeomorfe alla sfera S^2; nel quinto supplemento (1904) alla sua memoria del 1895, Poincaré costruisce un esempio di varietà E a tre dimensioni il cui gruppo $H_1(E)$ è banale, mentre $\pi_1(E)$ non lo è, ed enuncia una congettura per cui ogni varietà compatta, semplicemente connessa ed orientabile è omeomorfa ad S^3. Tale congettura può essere formulata in dimensione n nel modo seguente: ogni varietà di dimensione n, compatta, semplicemente connessa ed avente gli stessi gruppi di omologia (o di coomologia) di S^n è omeomorfa ad S^n? Con un risultato (1960) assai sorprendente Smale ha risposto positivamente per $n \geq 5$ a tale questione, mentre nei casi $n=3$, 4 la congettura di Poincaré resta un problema aperto, malgrado i numerosissimi studi ad essa finora dedicati.

5. *Aspetti della geometria differenziale.*

La geometria differenziale nasce sostanzialmente insieme all'analisi per rispondere all'esigenza di dare un significato geometrico a diverse operazioni di calcolo e si sviluppa fino al Settecento soprattutto come studio locale di curve e superfici dello spazio euclideo a tre dimensioni.

L'impostazione moderna ha inizio nel 1827 con l'opera di Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas*; in essa per la prima volta una superficie viene rappresentata in forma parametrica, avvio del concetto di varietà differenziabile, e viene chiarito il significato di proprietà intrinseca di una superficie, cioè di proprietà dipendente solo dalla metrica e non dalla forma con cui la superficie si presenta nello spazio.

Un nuovo impulso alla geometria differenziale viene dato dalla tesi di Riemann (scritta nel 1854, ma pubblicata nel 1866) *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sulle ipotesi fondamentali della geometria*). In essa la varietà appare come un ente astratto, i cui elementi sono individuati da n numeri e affiora anche la possibilità di considerare varietà di dimensione infinita: ma l'elemento caratteristico di Riemann è quello di considerare la varietà dotata di una forma quadratica che permette di eseguire delle misure di distanze e di angoli; anche oggi col termine 'geometria riemanniana' s'intende quella parte della geometria differenziale che si occupa delle proprietà metriche delle varietà.

Piú avanti Christoffel e quindi Ricci Curbastro introducono il calcolo differenziale assoluto il cui significato geometrico, in relazione a varietà riemanniane, verrà messo in evidenza da Levi-Civita e costituirà una delle basi matematiche della teoria della relatività.

Della scuola di geometria differenziale italiana occorre segnalare anche l'attività di Corrado Segre, di Bianchi, che è autore di trattati molto noti, e quindi di Fubini, Terracini e Bompiani, che hanno contribuito in maniera notevole allo sviluppo della geometria proiettivo-differenziale.

I progressi di altri filoni della matematica, quali i gruppi di Lie, la topologia algebrica e la topologia differenziale, avranno notevole influenza sulla geometria differenziale, ammesso che si possano chiamare con nomi diversi settori di ricerca tanto vicini: l'opera di Elie Cartan sembra la piú rappresentativa delle nuove tendenze.

La sua attività è orientata principalmente verso tre settori: la teoria dei gruppi, lo studio dei sistemi di equazioni differenziali e la geometria differenziale.

Nella recensione di un libro di Cartan scriveva Hermann Weyl: «Cartan è indubbiamente il piú grande maestro vivente nella geometria differenziale... Devo ammettere che ho trovato il libro, come la maggior parte dei lavori di Cartan, di difficile lettura. Può essere la ragione di questo solo nella grande tradizione geometrica francese in cui Cartan opera, ed i cui stile e contenuti egli suppone piú o meno acquisiti come fondamento comune per tutti i geometri,

mentre noi, nati ed educati in altre nazioni, non ne siamo partecipi?» [1938, p. 601].

La realtà è che i lavori di Cartan presentano forti innovazioni ed occorreranno alcuni decenni per comprendere, evidenziare e sistemare nella forma attuale i risultati piú significativi contenuti in essi.

Gli sviluppi degli ultimi tempi hanno fatto superare diversi confini che i settori della matematica si erano storicamente dati e, se da una parte ciò ha contribuito a renderla «piú difficile», si è anche assistito alla scoperta di risultati molto piú generali. Dallo studio infinitesimale e locale dei problemi, fatto con l'uso di derivate, che è tipico della geometria differenziale, si è cercato di avere informazioni su proprietà globali, magari di tipo topologico, delle varietà, e, d'altra parte, per lo studio di problemi in grande, è indispensabile e talvolta sufficiente conoscere il problema nei suoi aspetti locali.

Quello che segue, dopo alcune premesse, non potendo essere un'esposizione sistematica e coordinata dei diversi problemi della geometria e della topologia differenziale, è soltanto un tentativo di illustrare con alcuni esempi quanto si è detto.

5.1. Considerazioni elementari di geometria differenziale.

Per illustrare alcuni dei concetti che verranno utilizzati nel seguito, è opportuno considerare qualche problema che si presenta in maniera naturale nello studio di una superficie e, per semplicità, si esaminerà di solito un tipo preciso di superficie: l'ellissoide M di equazione cartesiana $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ che è un esempio di superficie connessa e compatta.

Varietà differenziabile. Un modo diverso per rappresentare la superficie, piú conveniente per gli scopi della geometria differenziale, è quello d'individuarne le varie parti mediante equazioni parametriche (cfr. § 4.5 dell'articolo «Curve

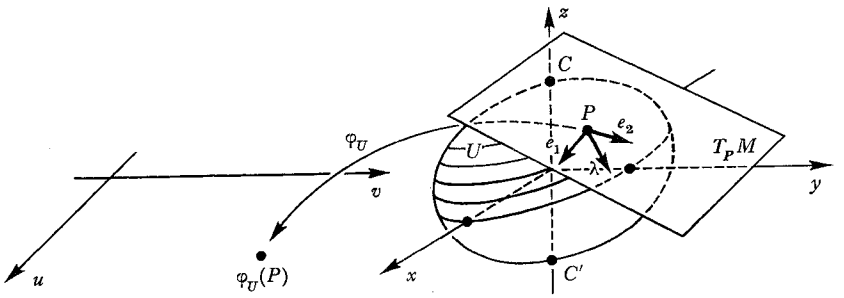


Figura 11.
Carta locale di un ellissoide e piano tangente nel punto P.

e superfici» di questa stessa *Enciclopedia*). Se si considerano tutti i punti dell'aperto U di M con $z>0$, essi si possono rappresentare nella forma:

$$(1)\qquad x=u \qquad y=v \qquad z=c\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}};$$

queste formule definiscono un omeomorfismo φ_U tra l'aperto U di M e l'aperto di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti (u, v) per cui $1-u^2/a^2-v^2/b^2>0$; se $\varphi_U(P)=(u, v)$, si dice che (u, v) sono le coordinate locali di P nella carta (U, φ_U) (cfr. fig. 11).

Se si considerano invece i punti dell'aperto V di M per cui $y>0$, essi si possono rappresentare con le equazioni parametriche

$$x=u' \qquad y=b\sqrt{1-\frac{u'^2}{a^2}-\frac{v'^2}{c^2}} \qquad z=v'$$

e si ha un omeomorfismo φ_V di V su un aperto di $\mathbf{R}^2$.

Se $P\in U\cap V$, tra le coordinate locali (u, v), (u', v') di P nelle due carte sussistono le relazioni

$$u'=u \qquad v'=c\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}.$$

Siccome è possibile trovare un certo numero di aperti del tipo U, V, ... con cui ricoprire l'ellissoide e inoltre poiché il passaggio tra le coordinate locali in carte diverse è espresso da funzioni differenziabili di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$, si dice che l'ellissoide ha una struttura di varietà differenziabile reale di dimensione 2.

Lo spazio tangente. Si consideri una curva γ passante per il punto P appartenente all'intorno coordinato U; per assegnare la curva γ basterà esprimere u, v come funzioni di un parametro t in modo che, se P ha coordinate locali u_0, v_0, risulti $u_0=u(t_0)$, $v_0=v(t_0)$.

Il vettore tangente $\dot\gamma(t_0)$ alla curva $\gamma(t)$ in P rispetto al riferimento naturale di $\mathbf{R}^3$ ha componenti, come risulta dalle (1), date da

$$\left(\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0}, \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_P\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_P\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0}\right)$$

o anche

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0}\left(1, 0, \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_P\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0}\left(0, 1, \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_P\right).$$

Da ciò segue che la totalità dei vettori tangenti in P ad M è uno spazio vettoriale T_PM di dimensione 2 (cfr. fig. 11), una cui base è costituita dai vettori $e_1=(1, 0, (\partial z/\partial u)_P)$ ed $e_2=(0, 1, (\partial z/\partial v)_P)$, che sono tangenti rispettivamente alle linee $u=t$, $v=v_0$ e $u=u_0$, $v=t$ passanti per P.

Considerato l'insieme $\mathfrak{F}(M)$ delle funzioni differenziabili a valori reali definite su M, ogni funzione f in un intorno di P si esprimerà nella forma $f(u, v)$; il vettore tangente $\dot{\gamma}(t_0)$ definisce un'applicazione lineare di $\mathfrak{F}(M)$ in $\mathbf{R}$ data da

$$\dot{\gamma}(t_0)(f)=\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))_{t_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_P\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_P\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0};$$

in particolare si ha

$$e_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_P \qquad e_2(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_P$$

per cui la base «naturale» e_1, e_2 si indica anche generalmente con $(\partial/\partial u)_P$, $(\partial/\partial v)_P$, e ogni vettore tangente si scrive

$$\lambda=\lambda^1\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_P+\lambda^2\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_P;$$

λ^1, λ^2 si dicono le componenti di λ in tale base.

La totalità dei vettori tangenti ad M costituisce il fibrato tangente TM, la cui fibra in ogni punto P di M è T_PM. Un campo vettoriale X su M è una legge che associa a ogni punto di M un vettore tangente con componenti che dipendono differenziabilmente dalle coordinate locali del punto e quindi X è una sezione differenziabile di TM.

Considerati due vettori qualsiasi di T_PM – $\lambda=\lambda^1(\partial/\partial u)_P+\lambda^2(\partial/\partial v)_P$ e $\mu=\mu^1(\partial/\partial u)_P+\mu^2(\partial/\partial v)_P$ –, utilizzando il prodotto scalare di $\mathbf{R}^3$ si ha $\lambda\cdot\mu=g_{11}\lambda^1\mu^1+g_{12}(\lambda^1\mu^2+\lambda^2\mu^1)+g_{22}\lambda^2\mu^2$ ove risulta $g_{11}=\|(\partial/\partial u)_P\|^2$, $g_{12}=(\partial/\partial u)_P\cdot(\partial/\partial v)_P$, $g_{22}=\|(\partial/\partial v)_P\|^2$; si può quindi eseguire il prodotto scalare in ogni spazio tangente e i prodotti scalari g_{ij} degli elementi della base naturale variano differenziabilmente col punto P; questo fatto si esprime dicendo che M ha una struttura riemanniana, quella che eredita come sottovarietà di $\mathbf{R}^3$.

La presenza della struttura riemanniana permette il calcolo di diverse grandezze, quali gli angoli tra vettori tangenti, le aree, le lunghezze di archi di curva; ad esempio, la curva $\gamma(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ ha lunghezza data da $L(\gamma)=\int_\alpha^\beta\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$, ove

$$\|\dot{\gamma}(t)\|=\sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2g_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Punti critici di funzioni definite sulla varietà. Lo scopo di quanto segue è quello di evidenziare alcune proprietà di funzioni a valori reali definite su M; ogni funzione f in un intorno coordinato U si rappresenta, come già si è detto, nella forma $f(u, v)$ come funzione da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$ e un punto Q di M si dice critico per f se si ha $(\partial f/\partial u)_Q=(\partial f/\partial v)_Q=0$.

Per studiare il comportamento di f vicino a un punto critico, si considera

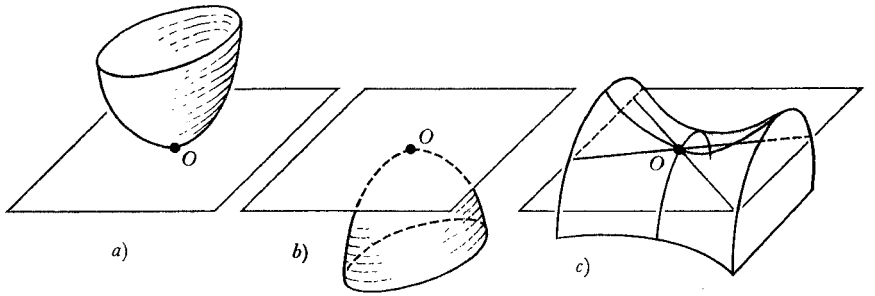


Figura 12.

Grafici di una funzione di due variabili nell'intorno di un punto critico non degenere: *a*) minimo, *b*) massimo, *c*) punto di sella.

l'analogo della derivata seconda di una funzione in una sola variabile, cioè la matrice hessiana di f in Q:

$$H_Q(f)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(Q) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}(Q)\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}(Q) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(Q)\end{pmatrix};$$

se il determinante di $H_Q(f)$ è diverso da zero, il punto Q si dice non degenere ed f presenta in Q un minimo, un massimo relativo oppure un punto di sella a seconda che gli autovalori di $H_Q(f)$ siano entrambi positivi, entrambi negativi oppure di segno opposto; ognuno di tali punti è isolato, cioè esiste un conveniente intorno di ognuno di essi in cui non cadono altri punti critici (fig. 12).

Una situazione meno precisa si ha se $\det H_Q(f)=0$; in tal caso il punto Q si dice degenere e non basta piú l'uso delle derivate seconde per decidere sul comportamento della funzione; i casi che si possono presentare sono, oltre a quelli già indicati, svariati altri (come ad esempio quelli della figura 13). La classificazione dei punti critici degeneri delle funzioni differenziabili da $\mathbf{R}^n$ ad $\mathbf{R}$ è alla base della teoria delle catastrofi elementari e una funzione dotata solo di punti critici non degeneri si dice anche di Morse.

Considerata una superficie M, si fissi un punto P_0 dello spazio e si consideri la funzione f definita da $f(P)=\|P-P_0\|^2$ per ogni punto P di M; si può vedere, anche per motivi geometrici intuitivi, che f ha un punto critico in Q se e solo se il segmento QP_0 è perpendicolare al piano tangente in Q ad M; cosí, ritornando all'esempio dell'ellissoide, se P_0 è un punto $(0, 0, z_0)$ dell'asse z, $\|P-P_0\|^2$ presenterà punti critici in $C(0, 0, c)$ e $C'(0, 0, -c)$. Per studiare la funzione nelle vicinanze del punto C, basterà considerarne la restrizione all'intorno coordinato U in cui, per le (1), è rappresentata da

$$\|P-P_0\|^2\equiv f(u, v)=u^2+v^2+\left(c\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}-z_0\right)^2;$$

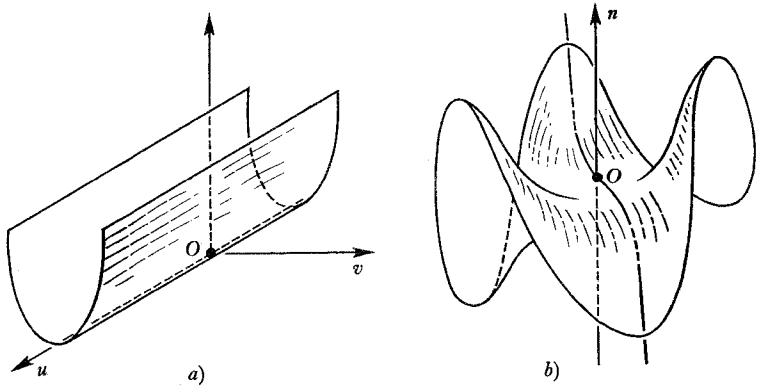


Figura 13.

Grafici di funzioni di due variabili nell'intorno di punti critici degeneri. In *a*) è rappresentata la funzione $f(u, v) = v^2$ con una retta di punti critici; in *b*) (sella di scimmia) si ha una superficie tale che ogni piano per n la interseca in una curva con un flesso in O: ad esempio la funzione f può essere data da $f(u, v) = u^3 - 3uv^2$.

il comportamento di f in C è determinato dalla posizione di P_0 e dalla forma dell'ellissoide; cosí, se P_0 è l'origine ($z_0 = 0$), se $a > c$ e $b > c$ f ha un minimo in C, mentre ha un massimo se $a < c$ e $b < c$, una sella se ad esempio $a < c < b$.

Fissato l'ellissoide, se si cerca per quali valori di z_0 la funzione considerata presenta in C un punto critico degenere, si trova che ciò avviene se e solo se $z_0 = c - (a^2/c)$, oppure $z_0 = c - (b^2/c)$; si trovano cosí in generale due punti R, S dell'asse z, che vengono detti punti focali relativamente alla superficie M e al punto C. I punti R, S sono strettamente legati, come si vedrà, alla geometria della superficie M in un intorno del punto C.

Curvature di una superficie. Se s'interseca l'ellissoide M con un piano α passante per la retta n perpendicolare ad M in C si ottiene un'ellisse σ il cui centro di curvatura, relativo al punto C, cioè il centro del cerchio (detto anche «osculatore») che meglio approssima σ in C, varia lungo il segmento RS al variare di α intorno alla retta n.

Le lunghezze dei segmenti congiungenti C con R e con S, con un segno opportuno dipendente dall'orientamento introdotto sulla retta n, si dicono i raggi di curvatura principali, i loro inversi sono le curvature principali, il cui prodotto rappresenta la curvatura gaussiana di M in C che è perciò data da $K = c^2/a^2b^2$.

In generale, se si fissa un punto di una qualsiasi superficie M, le curvature principali si possono calcolare direttamente (cfr. anche il § 4.4 dell'articolo «Curve e superfici» di questa stessa *Enciclopedia*) come il massimo e il minimo della curvatura (con segno) delle sezioni normali di M in quel punto; bisogna tenere presente inoltre che, a differenza dell'ellissoide in cui è ovunque $K > 0$ (fig. 14*a*), vi saranno anche dei punti in cui $K < 0$ (fig. 14*b*) e $K = 0$.

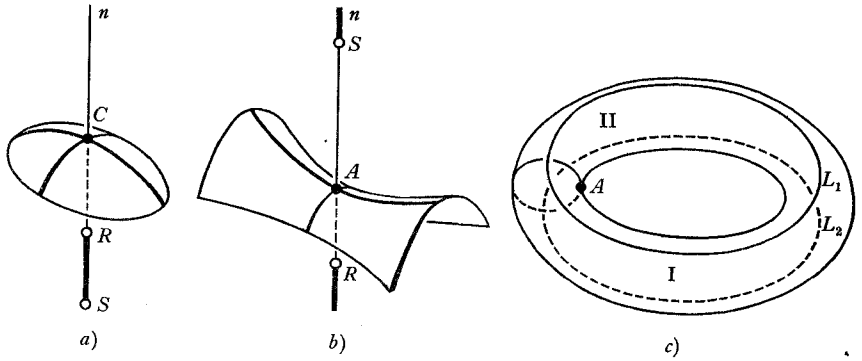


Figura 14.

Curvature principali: *a*) punto ellittico C; *b*) punto iperbolico A. Nel toro *c*) si ha una regione I di punti ellittici, una regione II di punti iperbolici e due curve L_1, L_2 di punti parabolici.

Se si considera ad esempio un toro, mentre nei punti esterni (regione I della figura 14*c*) si ha un comportamento analogo a quello dell'ellissoide, per i punti della regione II in cui il piano tangente taglia la superficie si otterrà una curvatura gaussiana negativa; basta osservare che nel punto A, per esempio, i centri di curvatura variano sulla retta normale n al di fuori del segmento RS e le curvature principali, che sono gl'inversi delle misure con segno di AR e AS, hanno segno opposto. Nei punti delle linee L_1 ed L_2 si ha che una delle curvature principali è nulla e quindi $K = 0$.

I punti di una superficie in cui $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$ si dicono rispettivamente ellittici, parabolici, iperbolici.

Un primo risultato interessante relativo alla curvatura K, noto come teorema «egregium» di Gauss, è che, pur definendo la curvatura gaussiana utilizzando l'immersione della superficie nello spazio, in realtà K è un ente intrinseco e dipende solo dalla metrica della superficie: due superfici come il piano e il cilindro, che localmente hanno la stessa metrica, hanno entrambi la stessa curvatura, che è nulla.

Un altro risultato fondamentale riguarda la curvatura totale di una superficie orientata e compatta, definita dal numero $\int_M K\, dS$, ove dS è l'elemento di area. Se ad esempio M è una sfera di raggio r, si ha $K = 1/r^2$ e la curvatura totale vale 4π, cioè non dipende dal raggio; ma si ha molto di piú: se si deforma la sfera, pur variando la curvatura gaussiana e l'elemento d'area, la curvatura totale non varia finché non compaiono buchi sulla superficie, cioè la curvatura totale è un invariante topologico. Si dimostra infatti che, indicando con $\chi(M)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré (cfr. p. 670) di M, si ha $\int_M K\, dS = 2\pi\chi(M)$, risultato noto come teorema di Gauss-Bonnet, che verrà ripreso in seguito.

Cosí per il toro si ha curvatura totale nulla e la cosa appare ragionevole dal punto di vista intuitivo in quanto al contributo positivo dato dai punti della

regione I (fig. 14*c*) bisogna sottrarre il contributo che proviene dalla regione II.

L'annullarsi di $\chi(M)$ per una superficie e piú in generale per ogni varietà compatta è inoltre condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza su M di un campo vettoriale continuo ovunque non nullo: se il riccio è ovunque ricoperto da aculei, non è possibile «pettinarlo» completamente, ma esiste almeno un aculeo che resta non tangente, perché la superficie del riccio ha la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré della sfera.

5.2. Applicazioni tra varietà differenziabili.

Varietà differenziabili. Oggetto della geometria e della topologia differenziale è lo studio delle varietà differenziabili, arricchite eventualmente di strutture ed operatori, e delle applicazioni tra varietà.

Una varietà differenziabile M di dimensione reale n, come è già stato scritto in altre parti di questa stessa *Enciclopedia* e come risulta anche dall'esempio del § 5.1, è uno spazio topologico che si può ricoprire mediante aperti omeomorfi ad aperti di $\mathbf{R}^n$ che permettono di attribuire a ogni punto x di un aperto U di M delle coordinate locali (x^i) tali che il passaggio ad altre coordinate (y^j), definite in un diverso intorno di x, avvenga mediante funzioni differenziabili. Un diffeomorfismo tra due varietà differenziabili è un omeomorfismo differenziabile, cioè un omeomorfismo che in coordinate locali si esprime attraverso funzioni differenziabili.

Se nella definizione di varietà differenziabile si sostituisce $\mathbf{R}^n$ con $\mathbf{C}^n$ e le funzioni che esprimono il cambiamento di coordinate locali sono olomorfe, si ha il concetto di varietà complessa di dimensione n (e dimensione reale $2n$).

Nel seguito si esamineranno in generale varietà reali; M si dice orientabile se è possibile ricoprirla mediante intorni coordinati in modo che il passaggio tra carte sia espresso da funzioni $y^j = y^j(x^i)$ per cui risulti positivo il determinante della matrice jacobiana $(\partial y^j/\partial x^i)$: una varietà orientabile ha due orientazioni e, quando se ne sceglie una, si dice che la varietà è orientata. Il piano, l'ellissoide, il toro sono esempi di varietà orientabili e la scelta di un'orientazione equivale alla scelta di un verso per la normale in ogni punto della varietà, da cui venga visto un senso di rotazione nel relativo piano tangente. Vi sono naturalmente varietà non orientabili; ad esempio lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ è orientabile se e solo se n è dispari.

Tra le superfici non orientabili si segnalano, oltre al piano proiettivo reale, il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein. Un modello di nastro di Möbius si ottiene considerando una striscia di carta rettangolare $ABCD$ e saldandone i relativi estremi dopo la torsione di un mezzo giro in modo che A coincida con C e B con D (cfr. fig. 15*a*). Non è possibile orientare una normale da una parte o dall'altra dappertutto perché, percorrendo ad esempio la curva PP' sul nastro, le due parti si scambiano fra di loro o, come anche si dice, il nastro di Möbius è ad una sola banda, a differenza della sfera o del toro; inoltre è notevole che, se si taglia il nastro lungo PP', esso resta connesso.

Un modello di bottiglia di Klein, che è compatta e non orientabile, si ottiene considerando un tubo aperto con un'estremità piú stretta dell'altra e saldandone i bordi dopo aver fatto penetrare l'estremità piú stretta attraverso la parete del tubo stesso (fig. 15*b*).

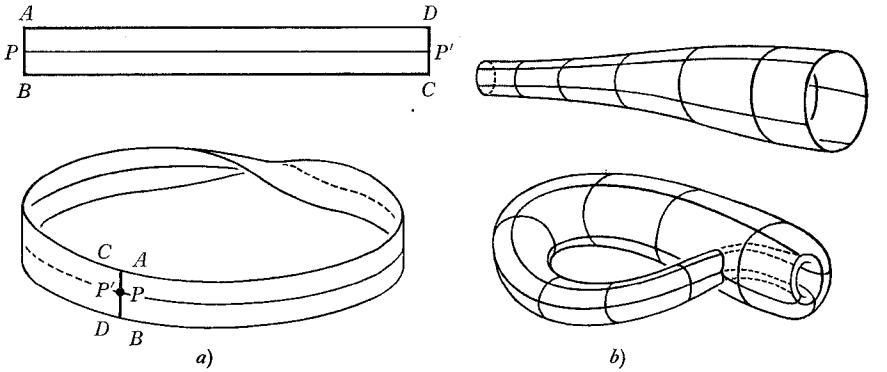


Figura 15.
a) Nastro di Möbius; *b*) bottiglia di Klein.

Una sottovarietà W di una varietà M è un sottoinsieme tale che per ogni punto $w \in W$ esiste un sistema di coordinate locali (x^i) in un intorno U di w in M in modo che per i punti di $U \cap W$ si abbia $x^1 = \ldots = x^q = 0$ (e il numero q si dice la codimensione di W).

Campi vettoriali. Lo spazio vettoriale tangente a M nel punto x, T_xM, è costituito dagli operatori lineari a valori reali $v = v^i(\partial/\partial x^i)_x$ (in cui si sommi, come nel seguito, rispetto agl'indici ripetuti) definiti sull'algebra $\mathfrak{F}(M)$ delle funzioni differenziabili su M secondo la legge $v(f) = v^i(\partial f/\partial x^i)_x$.

La totalità delle sezioni differenziabili del fibrato tangente TM, cioè dei campi vettoriali su M, si indicherà con $\mathfrak{X}(M)$ o piú semplicemente con $\mathfrak{X}$; esso, oltre ad una struttura di $\mathfrak{F}(M)$-modulo, ha anche una struttura definita dall'operazione $[\,,\,]$ tra campi vettoriali X, Y tale che $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$, da cui segue che $[X, Y]$ è un nuovo campo vettoriale; rispetto a $[\,,\,]$, $\mathfrak{X}$ ha una struttura di algebra di Lie.

Una curva $\gamma(t)$ di M si dice una curva integrale del campo vettoriale X se $X(\gamma(t))$ è il vettore $\dot{\gamma}(t)$ tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$; dal teorema di esistenza e di unicità dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie segue che per ogni punto y di M esiste ed è unica la curva integrale $\gamma(t)$ di X soddisfacente alla condizione iniziale $\gamma(0) = y$ e risulti inoltre definita in un intervallo massimale $\mathcal{J}(y)$; tale curva viene detta l'orbita di X passante per y e, per ricordare la sua dipendenza dalla condizione iniziale, si pone $\gamma(t) = \varphi(t, y)$.

Se si considerano le varie curve integrali uscenti dai punti di un intorno U di y, si ha l'applicazione $\varphi_t : z \to \varphi(t, z)$; se t è sufficientemente piccolo, φ_t è un diffeomorfismo di U su un aperto di M e inoltre risulta $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$,

sempre nell'ipotesi che t, s siano prossimi allo zero; per questi motivi φ_t si dice il gruppo locale di trasformazioni locali generato dal campo X. Se φ_t è definito per ogni $t \in \mathbf{R}$ allora il campo vettoriale è detto completo ed il gruppo φ_t è detto il flusso di X. Se M è compatta, ogni campo vettoriale è completo.

Campi tensoriali. Oltre al fibrato tangente vi sono altri fibrati vettoriali su M che intervengono spesso nelle applicazioni, i cosiddetti fibrati tensoriali della varietà; è tale il fibrato cotangente T^*M, duale di TM; la fibra di T^*M nel punto x di M è costituita dalle applicazioni lineari a valori reali di T_xM e le sue sezioni, dette 1-forme, sono localmente rappresentate da $\omega(x) = \omega_i(x)\, dx^i$, dove (dx^i) è la base duale di $(\partial/\partial x^i)$.

Piú in generale si possono considerare i fibrati $\Lambda^r(M)$, le cui sezioni o r-forme ($r = 0, 1, \ldots, n$) sono le applicazioni $\mathfrak{F}(M)$-lineari alternate di $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ in $\mathfrak{F}(M)$ e sono localmente rappresentate da $\omega(x) = \omega_{i_1 \ldots i_r}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$; ovviamente risulta $\Lambda^0(M) = \mathfrak{F}(M)$, $\Lambda^1(M) = T^*M$. È inoltre definito un operatore di differenziazione esterna $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ per cui $d^2 = 0$; ciò permette d'introdurre una coomologia, la coomologia di De Rham (cfr. il § 4.2 dell'articolo «Differenziale» di questa stessa *Enciclopedia*).

In generale, mediante prodotti tensoriali di TM e T^*M, si ottengono i diversi tipi di fibrati tensoriali su M (cfr. ad esempio il § 1.2 dell'articolo «Dualità» di questa stessa *Enciclopedia*).

Differenziale di un'applicazione. Nello studio delle applicazioni fra due varietà è importante valutare il comportamento da esse indotto sugli spazi tangenti, che costituisce sostanzialmente l'approssimazione del primo ordine dell'applicazione; precisamente, se $f : M \to N$, il differenziale di f nel punto x di M è l'applicazione lineare $(df)_x : T_xM \to T_{f(x)}N$, tale che, qualunque sia la funzione φ a valori reali definita in un intorno di $f(x)$, risulti $((df)_x v)(\varphi) = v(\varphi \circ f)$, $v \in T_xM$.

Utilizzando coordinate locali, si verifica che $(df)_x$ è l'applicazione lineare individuata dalla matrice jacobiana in x delle funzioni che esprimono le coordinate di $f(y)$ mediante quelle di y, con y variabile in un intorno di x; diverse proprietà di applicazioni tra varietà sono precisate attraverso il rango del differenziale.

Un punto x di M si dice un punto critico oppure un punto regolare dell'applicazione $f : M \to N$ a seconda che $(df)_x$ abbia rango inferiore o uguale alla dimensione di N. Un punto y di N si dice un valore regolare di f se ogni punto x di $f^{-1}(y)$ è un punto regolare, altrimenti y si dice un valore critico; un celebre teorema di Sard precisa che l'insieme dei valori critici di un'applicazione differenziabile ha misura nulla.

Se M, N sono varietà orientate con la stessa dimensione, si dice che l'applicazione f conserva l'orientazione o la inverte in un punto regolare x di M a seconda che $(df)_x$ abbia determinante positivo o negativo, e si pone rispettivamente $\operatorname{sign}(df)_x$ uguale a 1 oppure a -1. Supposte inoltre M compatta ed N connessa, se y è un valore regolare di f, il grado di f in y è il numero dato da $\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign}(df)_x$. Poiché tale intero non dipende dal valore regolare y,

esso prende il nome di grado di f e si indica con $\deg f$; il grado è un invariante per omotopia (cfr. p. 664).

Se y è un valore regolare di $f : M \to N$, l'insieme $f^{-1}(y)$, se non è vuoto, è una sottovarietà di M la cui dimensione è data dalla differenza tra le dimensioni di M ed N; cosí ad esempio se si considera la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, si ha che l'insieme dei punti definiti dall'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = a$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, qualunque sia $a \neq 0$, mentre $a = 0$ è l'unico valore critico di f.

Trasversalità. Tali proprietà di $f^{-1}(y)$ si estendono mediante la nozione di trasversalità, d'importanza fondamentale per dare un significato preciso al concetto di genericità, come si vedrà nel seguito; anche il *normal crossing*, che è uno strumento importante per la desingolarizzazione delle varietà algebriche, è collegato alla trasversalità.

Sia W una sottovarietà di N; un'applicazione differenziabile $f : M \to N$ si dice trasversa a W nel punto x di M se si presenta una delle eventualità:

a) $f(x)$ non appartiene a W;
b) $f(x)$ appartiene a W e si ha $(df)_x T_xM + T_{f(x)}W = T_{f(x)}N$.

L'applicazione f è detta trasversa a W se è trasversa in ogni punto x di M ed in tal caso $f^{-1}(W)$, se non è vuota, è una sottovarietà di M con la stessa codimensione di W.

Esempio 1.

Se $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, allora a è un valore regolare di f se e solo se f è trasversa alla sottovarietà, di codimensione 1, costituita dal punto a di $\mathbf{R}$.

Esempio 2.

Sia $M = \mathbf{R}$, $N = \mathbf{R}^2$ e W coincidente con l'asse x; si consideri l'applicazione $f : M \to N$ definita da $f(t) = (t, t^2)$. Essa è trasversa a W in ogni punto $t \neq 0$; perturbando di poco f si ottiene una funzione trasversa a W (fig. 16).

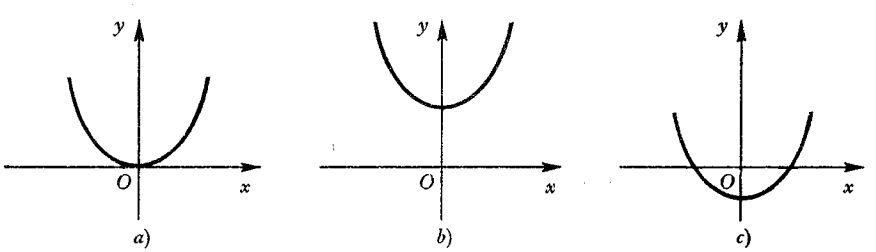


Figura 16.

La funzione $f(t) = (t, t^2)$ è trasversa all'asse x in tutti i punti diversi da $t = 0$. In *b*) e *c*) si hanno i grafici di due perturbazioni di f ovunque trasverse all'asse x.

Spazio dei getti e stabilità. In molti problemi non è sufficiente il tipo di approssimazione fornito dal differenziale, ma occorre tenere conto di derivate di ordine superiore: si perviene cosí allo spazio dei getti. Il concetto di getto di un'applicazione differenziabile, che ha avuto una sistemazione definitiva ad opera di Ehresmann, era ben presente nella trattazione degli elementi differenziali e delle calotte superficiali, dovuta in particolare a Bompiani.

Se $f : M \to N$, il getto di ordine k di f in un punto x di M, $j^k f(x)$, è l'ente rappresentato dalle coordinate locali di x (sorgente del getto) e di $f(x)$ (bersaglio) e inoltre dai coefficienti dei polinomi di Taylor di ordine k che rappresentano f in un intorno di x; la totalità dei getti di ordine k delle applicazioni differenziabili di M in N si indica con $\mathcal{J}^k(M, N)$ e fissata una funzione f, se il punto x varia in M, resta definita un'applicazione $j^k f : M \to \mathcal{J}^k(M, N)$ che associa al punto x il getto $j^k f(x)$. Lo spazio delle applicazioni differenziabili tra due varietà si può dotare di un'opportuna topologia, detta di Whitney, in cui si valutano le distanze fra i getti di due applicazioni; con questi strumenti vengono studiati diversi problemi della topologia differenziale e in particolare quello della stabilità di un'applicazione.

Due applicazioni differenziabili $f, g : M \to N$ si dicono equivalenti se esistono due diffeomorfismi $h : M \to M$, $k : N \to N$ tali che $k \circ f = g \circ h$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

ossia se, con un opportuno cambiamento di coordinate, f e g si rappresentano localmente nello stesso modo. Si dice che $f : M \to N$ è stabile se c'è un intorno di f nella topologia di Whitney costituito da applicazioni equivalenti ad f.

Cosí, per funzioni da $\mathbf{R}$ ad $\mathbf{R}$, sono stabili le funzioni di Morse, cioè le funzioni con derivata seconda non nulla nei punti in cui si annulla la derivata prima (ad esempio $f(x) = x^2$); mentre la funzione $f(x) = x^3$ non è stabile, perché funzioni del tipo $x^3 + ax$, con a arbitrariamente piccolo, pur essendo vicine ad f, non sono equivalenti ad essa, avendo punti critici di natura diversa.

Il problema della stabilità è un problema difficile: uno dei risultati piú significativi in questa direzione è stato ottenuto da Mather che ha dimostrato come tale problema, per sua natura locale, può essere ricondotto, se M è compatta, ad un problema infinitesimale, adattando opportunamente il teorema di preparazione di Weierstrass e Malgrange; lo studio del problema viene cosí trattato con strumenti puramente algebrici, utilizzando opportuni spazi di getti.

Genericità. Un altro problema importante relativo a proprietà di applicazioni tra varietà è quello della genericità. Il termine 'generico' ricorre spesso in matematica (è ad esempio tipico della geometria algebrica italiana) per indicare una proprietà soddisfatta da «quasi tutti» gli elementi di un dato insieme, anche se poi può essere difficile verificarla con calcoli effettivi.

Ora, se si considera l'insieme di tutte le applicazioni differenziabili tra due varietà con la relativa topologia di Whitney, si ha uno spazio topologico piuttosto complicato: una proprietà è generica se è soddisfatta da un insieme residuale (cioè intersezione numerabile di insiemi densi e aperti) di applicazioni.

Lo strumento fondamentale nello studio della genericità, che traduce tale problema in termini algebrici, è dato da un teorema di René Thom, secondo cui è residuale l'insieme $\mathrm{Tr}(W)$ costituito dalle applicazioni $f : M \to N$ tali che $j^k f : M \to \mathcal{J}^k(M, N)$ sia trasversa a una sottovarietà W di $\mathcal{J}^k(M, N)$.

Cosí le funzioni di Morse su una varietà sono stabili e la proprietà di essere una funzione di Morse è una proprietà generica, perché si può esprimere in termini di trasversalità. Mentre per decidere se una funzione è di Morse basta calcolare delle derivate prime e seconde (è cioè un problema di tipo infinitesimale) vi è tutto uno studio topologico delle varietà collegato all'esame delle funzioni di Morse definite sopra di esse (è un esempio del rapporto locale/globale); cosí si dimostra che se M è una varietà compatta su cui è definita una funzione di Morse con due soli punti critici, M è omeomorfa a una sfera.

Si segnala infine che, se si considera una famiglia generica di funzioni da $\mathbf{R}^n$ ad $\mathbf{R}$ dipendente da r parametri ($r \leq 4$), per quasi tutti i valori dei parametri si ottengono delle funzioni di Morse, ma esistono nella famiglia anche delle funzioni con singolarità piú elevate: partendo dallo studio e dalla classificazione di tali singolarità, Thom è pervenuto ai famosi sette modelli di catastrofi elementari.

5.3. Strutture su una varietà differenziabile.

In molti problemi le varietà differenziabili vengono supposte dotate di opportune strutture che permettono la trattazione di questioni specifiche: cosí, se si vogliono studiare problemi in cui intervengono calcoli di lunghezze, volumi, angoli, occorrerà supporre la varietà dotata di una struttura riemanniana.

Secondo Shoshichi Kobayashi, «tutte le strutture geometriche non sono state create uguali: certe sono creazioni divine mentre altre sono prodotti delle inferiori menti umane. Tra le prime emergono le strutture riemanniana e complessa per la loro bellezza e ricchezza» [1972, p. v].

Si può aggiungere a tale considerazione che vi sono poi delle strutture la cui rilevanza dipende dalle scienze che le utilizzano; è questo il caso della struttura simplettica, di fondamentale importanza nella meccanica analitica.

Nel seguito si esamineranno alcune proprietà relative a strutture, ognuna definita da un campo tensoriale S; una tale struttura è detta integrabile se esiste un sistema di coordinate locali in cui S ha componenti costanti. Oltre a quello dell'integrabilità, i problemi che hanno maggior interesse riguardano:

a) esistenza di strutture ed eventuale isomorfismo tra esse;
b) automorfismi di strutture, cioè trasformazioni della varietà compatibili con la struttura, con particolare riguardo agli automorfismi infinitesimi, ossia ai campi vettoriali che generano gruppi locali di automorfismi;
c) operatori differenziali, in particolare connessioni, adattate alla struttura.

Per lo studio di alcuni aspetti piú generali delle strutture, anche non indotte da campi tensoriali, si utilizzano opportuni sottofibrati del fibrato dei riferimenti; tali sottofibrati sono associati a sottogruppi G del gruppo lineare $GL(n, \mathbf{R})$ delle matrici reali invertibili di ordine n: da qui il termine di G-strutture; ad esempio nel caso delle strutture riemanniane G è il sottogruppo ortogonale $O(n)$.

Varietà riemanniane. La struttura riemanniana su una varietà M si ottiene, nello stesso modo introdotto localmente da Riemann, assegnando un campo tensoriale simmetrico g definito positivo, $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ e quindi un prodotto scalare g_x in ogni spazio tangente $T_x(M)$; g_x è individuato in coordinate locali (x^i) da una matrice $(g_{ij}(x))$.

La metrica riemanniana g stabilisce una dualità tra TM e T^*M mediante gli isomorfismi «musicali» di abbassamento e innalzamento degli indici; essa inoltre permette di definire un'operazione d'integrazione per le funzioni a valori reali o complessi con supporto compatto in M, che si indica $\int_M f$ o anche $\int_M f\, dV$ dove dV è l'elemento di volume di M (se M è orientabile). Se il supporto di f è contenuto in un aperto coordinato U dotato di coordinate locali (x^i) mediante la carta $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$, si pone

$$\int_M f = \int_{\varphi(U)} f(x)\sqrt{\det g_{ij}(x)}\, dx^1 \ldots dx^n,$$

ove il secondo membro è un ordinario integrale di $\mathbf{R}^n$; in generale, l'integrale di una funzione a supporto compatto sarà somma di un numero finito d'integrali del tipo precedente.

Se E è un fibrato vettoriale su M con fibre dotate di prodotto scalare $(\ ,\ )$, si può definire un prodotto scalare globale $\langle\ ,\ \rangle$ sullo spazio $\Gamma_c(E)$ delle sezioni di E a supporto compatto in M: $\langle X, Y\rangle = \int_M (X, Y)$, che interviene nello studio degli operatori.

Ogni varietà può essere dotata di una struttura riemanniana; se tale struttura è integrabile, cioè esistono sistemi di coordinate locali in cui le funzioni g_{ij} sono costanti, la varietà viene detta localmente euclidea o piatta, perché si può identificare localmente (e anche globalmente se sono verificate certe condizioni di tipo topologico) con $\mathbf{R}^n$ dotato della solita metrica.

Le trasformazioni che conservano una struttura riemanniana sono le isometrie, mentre le isometrie infinitesime si chiamano anche campi di Killing. Sono noti diversi risultati relativi alle isometrie di M, che costituiscono un gruppo di Lie con dimensione non superiore a $(1/2)n(n+1)$ ed esistono caratterizzazioni delle varietà con tante oppure poche isometrie; nel caso di varietà compatte lo studio delle isometrie infinitesime fornisce anche delle informazioni di tipo topologico.

Esiste inoltre un'unica connessione compatibile con g con torsione nulla, detta di Levi-Civita, che verrà studiata nel prossimo paragrafo.

Se la varietà M è dotata di un campo tensoriale simmetrico non degenere g di segnatura (p, q), ove p, q indicano rispettivamente il numero di autovalori

positivi e negativi di g, si dice che M è dotata di una struttura pseudoriemanniana, fondamentale nella teoria della relatività; a differenza della struttura riemanniana, ci sono ostruzioni all'esistenza di strutture pseudoriemanniane.

Strutture complesse. Una struttura quasi complessa su una varietà differenziabile M di dimensione reale $2n$ è costituita da un campo di endomorfismi $\mathcal{J}$ di TM tale che $\mathcal{J}^2 = -I$ (I designa l'identità).

Se si ha una varietà complessa di dimensione complessa n dotata di coordinate locali $z^k = x^k + iy^k$ in un aperto U, essa ha una struttura canonica di varietà quasi complessa definita localmente da $\mathcal{J}_U(\partial/\partial x^k) = (\partial/\partial y^k)$, $\mathcal{J}_U(\partial/\partial y^k) = -(\partial/\partial x^k)$; le condizioni di Cauchy-Riemann permettono di estendere la struttura a tutta la varietà.

Una struttura quasi complessa è integrabile se proviene da una struttura complessa; l'integrabilità può essere anche caratterizzata dall'annullarsi di un certo campo tensoriale introdotto da Nijenhuis o dall'esistenza di una connessione lineare a torsione nulla compatibile con $\mathcal{J}$.

Esistono ostruzioni all'esistenza di strutture quasi complesse; Borel e Serre ad esempio hanno dimostrato che le sole sfere che ammettono una struttura quasi complessa sono S^2 e S^6.

Su ogni varietà quasi complessa M è possibile introdurre una metrica riemanniana g compatibile con $\mathcal{J}$, cioè tale che qualunque siano i campi vettoriali X, Y risulti $g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = g(X, Y)$; la varietà si dice allora quasi hermitiana (e hermitiana se $\mathcal{J}$ è integrabile); considerata la 2-forma Φ definita da $\Phi(X, Y) = g(X, \mathcal{J}Y)$ se Φ è chiusa ($d\Phi = 0$) la varietà si dice quasi kähleriana (e kähleriana se $\mathcal{J}$ è integrabile).

Lo spazio proiettivo complesso e le sue sottovarietà algebriche non singolari sono esempi di varietà kähleriane compatte e questo è uno dei «ponti» tra geometria differenziale e geometria algebrica che ha permesso alla seconda di usufruire d'importanti strumenti di tipo coomologico (cfr. § 6.2).

Strutture simplettiche. Una struttura quasi simplettica (o quasi hamiltoniana) su una varietà M di dimensione reale $2n$ è definita da una 2-forma ω di rango massimo, cioè per ogni punto x di M la matrice emisimmetrica costituita dalle componenti di $\omega(x)$ è invertibile. Se la forma ω è chiusa la struttura è integrabile e si dice simplettica o hamiltoniana; allora localmente si può porre $\omega = dx^1 \wedge dx^{n+1} + \ldots + dx^n \wedge dx^{2n}$. L'esistenza su una varietà di una struttura quasi simplettica è equivalente a quella di una struttura quasi complessa e l'integrabilità della struttura si può caratterizzare in entrambi i casi attraverso le connessioni; in particolare, tutte le varietà kähleriane hanno una struttura simplettica.

L'esempio di struttura simplettica piú significativo è fornito dal fibrato cotangente T^*M; se in esso si assumono come coordinate locali i numeri (x^i, p_i), ove p_i sono le componenti di un vettore cotangente rispetto alla base naturale (dx^i), la 2-forma fondamentale su T^*M ha l'espressione $\omega = dx^i \wedge dp_i$.

5.4. Operatori differenziali su una varietà.

Nello studio delle varietà differenziabili si presentano in modo naturale degli operatori differenziali, che sono estensione di enti analoghi definiti su $\mathbf{R}^n$. Nel seguito verranno considerati due tipi di operatori differenziali, le connessioni lineari e l'operatore di Laplace, mentre altri aspetti piú generali degli operatori verranno trattati nel paragrafo successivo.

Lo studio delle connessioni permette di misurare «l'incurvamento» di una varietà riemanniana, cioè di quanto essa si discosti dallo spazio euclideo $\mathbf{R}^n$ e inoltre, mediante l'estensione della connessione ai fibrati vettoriali e ai fibrati dei riferimenti, costituisce uno degli strumenti piú semplici per l'introduzione delle classi caratteristiche.

L'operatore di Laplace è il prototipo degli operatori differenziali «interessanti» soprattutto nelle applicazioni e lo studio dei suoi autovalori fornisce informazioni sulla struttura riemanniana di una varietà compatta.

Connessioni lineari. Il concetto di connessione venne introdotto mediante l'operazione di differenziazione covariante come una «correzione» dell'ordinaria operazione di derivata parziale che permettesse di ottenere campi tensoriali da campi tensoriali; il concetto di trasporto per parallelismo diede quindi un significato geometrico a tale operazione (cfr. anche il § 4.4 dell'articolo «Curve e superfici» di questa stessa *Enciclopedia*).

La presentazione moderna di connessione è piuttosto «algebrizzata», ma è in un certo senso piú semplice e si estende facilmente a fibrati vettoriali qualsiasi.

Una connessione lineare viene definita di solito come un operatore ∇ sul fibrato TM che a due campi vettoriali X, Y associa il campo vettoriale $\nabla_X Y$, detto la derivata covariante di Y rispetto ad X, in modo che, qualunque sia la funzione f, siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \qquad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$
$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \qquad \nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y.$$

In coordinate locali, se $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^i \partial_i$ ($\partial_i = \partial/\partial x^i$), posto $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, ove Γ_{ij}^k sono certe funzioni, dette le componenti della connessione, risulta $\nabla_X Y = X^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) \partial_k$. Se v è un vettore tangente a M nel punto x e X è un campo vettoriale tale che $X(x) = v$, la derivata covariante di Y rispetto a v, $\nabla_v Y$, è l'elemento di $T_x M$ definito da $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)(x)$. Inoltre, la derivata covariante di un campo Y lungo una curva γ, $\nabla_{\dot\gamma} Y$, ove $\dot\gamma$ è il vettore tangente a γ, dipende solo dai valori di Y su γ; il campo Y si dice parallelo lungo γ se $\nabla_{\dot\gamma} Y = 0$ e γ si dice una geodetica se $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$. In coordinate locali le equazioni parametriche $x^i(t)$ di una geodetica γ soddisfano il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k (x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0,$$

da cui segue che, fissati un punto x e un vettore v di $T_x M$, esiste ed è unico l'arco di geodetica $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (a, b)$, tale che $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = v$.

Ogni connessione lineare individua due campi tensoriali, la torsione T e la curvatura R definiti da

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$
$$R(X, Y) Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ove $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$; la connessione si dice simmetrica se $T = 0$.

L'operatore di derivazione covariante ∇ si può estendere a campi tensoriali qualsiasi S; se risulta $\nabla_X S = 0$ qualunque sia X, il campo S si dice parallelo o anche che la connessione è compatibile con S. Cosí dire che una connessione è compatibile con un campo di endomorfismi $\mathcal{J}$ equivale alla condizione $\nabla_X (\mathcal{J} Y) = \mathcal{J} \nabla_X Y$, mentre ∇ è compatibile con una metrica riemanniana g se si ha $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

Già si è detto (§ 5.3) che la possibilità di trovare una connessione simmetrica compatibile con una struttura quasi complessa o anche con una struttura quasi simplettica equivale all'integrabilità della struttura. Esiste invece ed è unica la connessione simmetrica compatibile con una metrica riemanniana g, detta di Levi-Civita, le cui componenti sono date da

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij})$$

in cui (g^{kr}) indica la matrice inversa di (g_{ij}). Nel seguito si utilizzerà tale connessione, il cui tensore di curvatura dipende quindi solo dalla metrica g.

Se a, b è una coppia di vettori ortonormali tangenti in un punto x di M, detto p il loro piano, la curvatura sezionale di p è il numero $K(p) = g(R(a, b)b, a)$ e coincide con la curvatura gaussiana nel punto x della superficie luogo delle geodetiche di M tangenti in x al piano p; la curvatura sezionale in ogni punto individua il tensore di curvatura e il suo annullarsi caratterizza le varietà localmente euclidee. Le varietà per cui la curvatura sezionale K è indipendente da x e da p si dicono a curvatura costante; un celebre teorema di Schur precisa che, se M ha dimensione ≥ 3 e $K(p)$ non dipende da p, allora non dipende da x.

Il tensore di Ricci è il tensore simmetrico ρ definito da

$$\rho(u, v) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, u)v, e_i)$$

ove $u, v \in T_x M$ e (e_i) è una base ortonormale di tale spazio; infine la curvatura scalare τ è la traccia del tensore di Ricci e quindi

$$\tau = \sum_{j=1}^n \rho(e_j, e_j) = \sum_{i,j=1}^n g(R(e_i, e_j)e_j, e_i);$$

la curvatura scalare di una superficie risulta pertanto il doppio della curvatura gaussiana.

Geodetiche e campi di Jacobi. Si può verificare che le geodetiche definite mediante la connessione di Levi-Civita coincidono con le solite geodetiche ottenute come curve di lunghezza stazionaria congiungenti due punti di una varietà riemanniana M. La varietà M si dice geodeticamente completa se ogni arco di geodetica $\gamma(t)$, definito per $t \in (a, b)$, si può prolungare a una geodetica definita su tutto $\mathbf{R}$. Un teorema di Hopf-Rinow afferma che la completezza geodetica è equivalente alla completezza ordinaria di M come spazio metrico e in tal caso due punti di M possono essere congiunti da una geodetica minimale.

Sia $\gamma(t)$ $(t \in (a,b))$ un arco di geodetica e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (a, b) \to M$ un'applicazione tale che $\alpha_u(t) = \alpha(u, t)$ sia una geodetica per ogni u e inoltre $\alpha(0, t) = \gamma(t)$; l'applicazione α si dice una variazione per geodetiche di γ e il campo $V(t) = (\partial\alpha/\partial u)(0, t)$ prende il nome di campo di Jacobi lungo γ. Due punti x, y di γ si chiamano coniugati se esistono campi di Jacobi non identicamente nulli su γ, che si annullano in x, y; sono coniugati ad esempio due punti diametralmente opposti di una sfera. Una proprietà notevole è che, se tra i punti x, z di una geodetica γ esiste un punto y coniugato a x, l'arco di geodetica xz non è minimale tra gli archi di curva congiungenti x, z.

Vi sono diversi importanti risultati che collegano questioni di curvatura con distanze di punti coniugati e che si riflettono su proprietà topologiche della varietà; due risultati in un certo senso agli antipodi sono:

a) il teorema di Cartan secondo cui varietà semplicemente connesse (cfr. p. 663) e complete con curvatura sezionale non positiva sono prive di coppie di punti coniugati e risultano diffeomorfe ad $\mathbf{R}^n$;

b) i teoremi di Myers e Bonnet che esprimono sostanzialmente che ogni arco geodetico di lunghezza maggiore di πr $(r > 0)$ contiene punti coniugati se la curvatura sezionale è ovunque $\geq 1/r^2$; inoltre, se la varietà è completa, è anche compatta e ha diametro non superiore a πr.

Gradiente, divergenza ed operatore di Laplace. Sia M una varietà riemanniana di dimensione n con metrica g; il gradiente di una funzione f a valori reali è il campo vettoriale $\operatorname{grad} f$ caratterizzato da $g(\operatorname{grad} f, Y) = Y(f)$, qualunque sia il campo vettoriale Y.

La divergenza di un campo vettoriale X è la traccia dell'endomorfismo $V \to \nabla_V X$, ove ∇ è la connessione di Levi-Civita.

Componendo i due precedenti operatori si ottiene l'operatore di Laplace (o di Laplace-Beltrami) sulle funzioni definito da: $\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$; il segno negativo non è comune a tutte le definizioni, ma è opportuno quando si estenda Δ alle forme differenziali.

In coordinate locali si verifica che $\Delta f = -g^{ji}(\partial_j \partial_i f - \Gamma^k_{ji} \partial_k f)$. Se M è una varietà compatta, l'operatore Δ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare ordinario $\langle f, g \rangle = \int_M fg$ e lo spettro di Δ, cioè l'insieme dei suoi autovalori, costituisce una successione discreta $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots\}$ che tende a $+\infty$; per ogni autovalore λ_i, il corrispondente autospazio ha dimensione finita. Fra le varie

proprietà spettrali interessanti si ha che la funzione $Z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$ per $t \to 0_+$, ha un comportamento asintotico del tipo $(4\pi t)^{-n/2}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k + \ldots)$. Mentre era noto che a_0 rappresenta il volume di M, $a_1 = (1/6)\int_M \tau$, ove τ è la curvatura scalare, McKean e Singer in un fondamentale lavoro del 1967 provano che tutti i coefficienti a_i sono legati alla struttura metrica della varietà, potendosi esprimere come integrali di funzioni polinomiali, invarianti rispetto al gruppo ortogonale, del tensore di curvatura e delle sue derivate covarianti.

La ricerca di legami fra autovalori di Δ e proprietà metriche della varietà compatta M è stata significativamente espressa come il problema di «udire la forma di un tamburo»; ma Milnor per primo ha dato un esempio di varietà isospettrali non isometriche.

5.5. Da Gauss-Bonnet al teorema dell'indice.

Il teorema di Gauss-Bonnet costituisce uno dei punti d'incontro piú significativi tra geometria differenziale e topologia; l'interesse per questo teorema è sempre stato notevole e molti progressi della matematica si possono leggere nella «storia» delle successive generalizzazioni del teorema stesso.

Indice di un campo vettoriale. La caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M)$ di una varietà compatta M è stata introdotta nel § 4.3 mediante le triangolazioni e quindi le dimensioni dei gruppi di omologia e coomologia reali. Si vedrà ora come il numero $\chi(M)$ si possa mettere in relazione con i punti singolari di un campo vettoriale X sulla varietà M.

Se X ha uno zero isolato nel punto x di una varietà orientata M, resta definito un numero intero, l'indice di X in x. Ad esempio, se M è il piano con la solita orientazione antioraria, l'indice di X nello zero isolato x rappresenta il numero di giri (presi col segno positivo o negativo a seconda che avvengano in

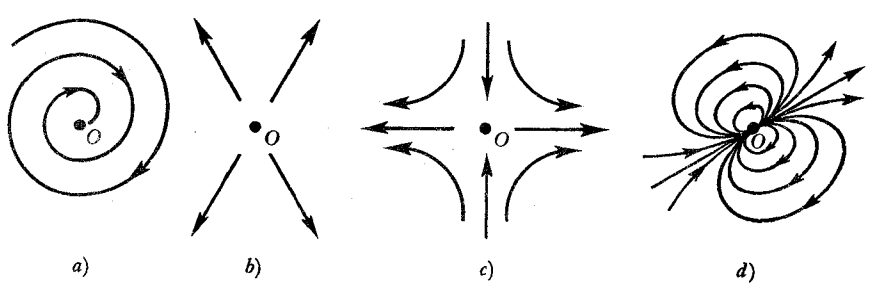


Figura 17.

Alcuni esempi di curve integrali di campi vettoriali del piano nell'intorno di un punto singolare isolato O: *a*) punto di spirale e indice 1; *b*) sorgente e indice 1; *c*) punto di sella e indice -1; *d*) punto con indice 2.

senso antiorario od orario) compiuti dal vettore $X(y)$ quando y descrive una curva semplice chiusa che circonda il punto singolare x, lasciando al di fuori altre eventuali singolarità (fig. 17). Un importante teorema di Poincaré-Hopf afferma che su una varietà orientata e compatta M la somma degl'indici di un campo X, dotato solo di zeri isolati, è la caratteristica $\chi(M)$: da ciò segue fra l'altro l'indipendenza della somma degli indici dal campo e ancora una volta l'indipendenza di $\chi(M)$ dalla triangolazione.

Inoltre l'annullarsi di $\chi(M)$ è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di campi vettoriali continui su M privi di singolarità, cioè $\chi(M)$ è un'ostruzione all'esistenza di sezioni di TM ovunque non nulle; tale ostruzione si può anche esprimere mediante un'opportuna classe caratteristica, la classe di Eulero, che s'introdurrà nel seguito e che costituisce una classe di coomologia di M, nulla solo per $\chi(M)=0$.

Il teorema di Gauss-Bonnet. Come già si è detto nel § 5.2, il teorema di Gauss-Bonnet per una superficie orientata e compatta M è espresso da

$$(2) \qquad \int_M K\, dS = 2\pi\chi(M),$$

dove K è la curvatura gaussiana della superficie, cioè è l'unica curvatura sezionale definita dalla connessione di Levi-Civita; la rilevanza del teorema consiste nel fatto che, mentre il primo membro della (2) si costruisce con quantità di tipo differenziale come K e l'elemento d'area dS, il secondo membro è un invariante di tipo topologico. Una deformazione topologica di M, ad esempio la deformazione di una sfera in un ellissoide, altera in generale sia K che l'elemento d'area, ma non modifica la curvatura totale $\int_M K\, dS$.

La prima estensione del teorema di Gauss-Bonnet è dovuta a Hopf e riguarda una sottovarietà orientata compatta di dimensione $2m$ immersa in $\mathbf{R}^{2m+1}$; se si considera l'applicazione di Gauss n che associa a ogni x di M il vettore unitario $n(x)$ normale a M, n è un'applicazione di M in S^{2m}, il cui determinante jacobiano $K_{2m}(x)$ viene detto la curvatura gaussiana di M in x (e, per $m=1$, coincide con la curvatura gaussiana precedentemente considerata di una superficie); il teorema di Gauss-Bonnet nella forma estesa è espresso da

$$(3) \qquad \int_M K_{2m}\, dV = \frac{1}{2}\chi(M)\,\mathrm{vol}(S^{2m}).$$

La validità di questa formula è stata poi generalizzata da Allendoerfer e Fenchel per sottovarietà orientate compatte di dimensione $2m$ immerse in $\mathbf{R}^{2m+k}$: che questo potesse considerarsi come il caso generale si è compreso solo piú tardi, quando Nash e Kuiper hanno dimostrato la possibilità di un'immersione isometrica di ogni varietà riemanniana compatta in un opportuno $\mathbf{R}^N$.

Tuttavia, data la natura intrinseca della (3), si poneva la necessità di una sua dimostrazione con gli stessi requisiti; questa è stata data nel 1944 da Chern (il cui nome ormai si accompagna a quelli di Gauss e Bonnet). Si osservi a questo proposito che $K_{2m}\, dV$ è una forma differenziale chiusa ω_{2m}, che si

esprime mediante un polinomio di grado m nelle componenti del tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita; $2\omega_{2m}$ è la classe di Eulero di TM.

Verso il teorema dell'indice. Il teorema di Gauss-Bonnet nella sua forma generale rientra, come il teorema di Riemann-Roch per le varietà kähleriane (cfr. p. 705), in una serie di risultati che sono stati ottenuti nello studio degli operatori ellittici, un campo di ricerche ancora in evoluzione che hanno come oggetto lo studio di relazioni tra invarianti di tipo analitico e di tipo topologico definiti da opportuni operatori tra fibrati vettoriali.

Lo studio di questi problemi richiede l'uso di strumenti molto raffinati di analisi e di topologia, che sono cosí strettamente collegate da giustificare il termine 'topologia ellittica', proposto da Atiyah [1967, p. 248] per indicare questa parte della matematica.

Senza entrare nei dettagli si cercherà d'illustrare nel seguito la terminologia e qualche aspetto del problema.

Siano E, F fibrati vettoriali complessi su una varietà compatta M, P un operatore differenziale di E in F di ordine k; cioè ad ogni sezione λ di E, di componenti $(\lambda^\alpha(x))$ rispetto a una base locale, l'operatore P fa corrispondere la sezione $\mu = P(\lambda)$ di F rappresentata localmente da componenti del tipo

$$\mu^i = \sum_{|A|\le k} a^i_{A\alpha}(x)\, D^A\lambda^\alpha$$

ove A è un multiindice intero $A=(a_1, \dots, a_n)$ $(n=\dim M)$ e

$$D^A\lambda^\alpha = \frac{\partial^{|A|}\lambda^\alpha}{\partial x_1^{a_1}\dots\partial x_n^{a_n}},$$

$|A| = a_1+\dots+a_n$, mentre $\alpha=1, \dots, q$ e $i=1, \dots, r$, essendo q, r rispettivamente i ranghi di E, F(cioè le dimensioni delle fibre di E, F).

Fissato un vettore covariante $\xi \in T^*_xM$, il simbolo $\sigma(P)$ di P associa alla coppia (x, ξ) l'omomorfismo $E_x \to F_x$ definito dalla matrice $(\sum_{|A|=k} a^i_{A\alpha}\xi_A)$; P si dice ellittico se tale omomorfismo è un isomorfismo, qualunque siano $x \in M$ e $\xi \neq 0$, il che implica in particolare che i due fibrati abbiano lo stesso rango.

Ad esempio, per l'operatore di Laplace (cfr. p. 690) Δ sulle funzioni definite su una varietà riemanniana e a valori complessi, che sono le sezioni di un fibrato vettoriale di rango 1, si ha $\sigma(\Delta)(x, \xi) = -g^{ji}(x)\,\xi_j\xi_i$, che è ovunque negativo per $\xi \neq 0$ e quindi Δ è ellittico.

Una metrica riemanniana su M induce per dualità un prodotto scalare su T^*_xM e si può quindi considerare il fibrato sfera $S(M)$ su M i cui elementi sono le coppie (x, ξ) con $\|\xi\|=1$; la proiezione $\pi : S(M) \to M$, definita da $\pi(x, \xi) = x$, permette di introdurre i fibrati π^*E, π^*F su $S(M)$ che hanno le stesse fibre di E, F e, se P è ellittico, $\sigma(P)$ è un isomorfismo tra π^*E e π^*F.

Un teorema fondamentale esprime che, per ogni operatore ellittico P, hanno dimensione finita sia il nucleo, $\mathrm{Ker}\,P$, che il conucleo, $\mathrm{Coker}\,P = \Gamma(F)/\mathrm{Im}\,P$ e l'indice di P (detto anche indice analitico per il modo stesso con cui viene de-

finito) è il numero intero $\mathrm{ind}(P) = \dim \mathrm{Ker}\, P - \dim \mathrm{Coker}\, P$, e dipende solo dal simbolo $\sigma(P)$. Inoltre simboli omotopi (come isomorfismi di π^*E in π^*F) hanno lo stesso indice, che dà quindi origine a una funzione a valori interi sull'insieme delle classi di omotopia degli isomorfismi tra π^*E e π^*F; cosí ad esempio, nel caso particolare in cui E, F siano fibrati triviali di rango 1 (cioè fibrati con una sezione globale come base), gli isomorfismi tra π^*E e π^*F sono applicazioni da $S(M)$ all'insieme dei numeri complessi $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$; poiché $\mathbf{C}^*$ ammette una retrazione su S^1, l'indice è definito sulle classi d'omotopia $[S(M), S^1]$.

Quanto detto sopra ha indotto Gel'fand a porre il problema di una definizione topologica dell'indice. Atiyah e Singer hanno fornito tale formula in termini di classi di Chern legate all'operatore e di classe di Todd della varietà e hanno provato (1963) l'uguaglianza dell'indice topologico cosí definito con l'indice analitico: è questo il «teorema dell'indice».

Occorre ancora tenere presente che, oltre a strumenti di topologia algebrica, intervengono nei problemi dell'indice metodi differenziali, collegati agl'invarianti di curvatura della varietà e a connessioni su fibrati vettoriali, e problemi relativi alla teoria spettrale degli operatori, con sviluppi asintotici analoghi a quelli dell'equazione del calore, il cui nome è spesso accoppiato al teorema dell'indice: questi metodi traggono origine dal già citato lavoro di McKean e Singer sullo spettro dell'operatore di Laplace e sono stati sviluppati da Gilkey e quindi da Atiyah, Bott, Patodi.

Ecco infine uno dei modi con cui la caratteristica di Eulero-Poincaré può essere letta come indice di un operatore ellittico: si tratta in sostanza di una conseguenza del teorema di Hodge sulle forme armoniche, che del resto ha ispirato la successiva teoria dell'indice.

Sulla varietà compatta M, oltre all'operatore di differenziazione esterna $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$, si può definire un operatore $\delta : \Lambda^{r+1}(M) \to \Lambda^r(M)$, detto il codifferenziale, che è l'aggiunto di d in un opportuno prodotto scalare tra forme differenziali. L'operatore $D = d + \delta : \Sigma\Lambda^r(M) \to \Sigma\Lambda^r(M)$ è autoaggiunto ed ellittico, da cui in particolare $\mathrm{ind}(D) = 0$, poiché il conucleo di un operatore ellittico è canonicamente isomorfo al nucleo dell'aggiunto. Il quadrato di D è l'operatore di Laplace Δ sulle forme e si ha $\mathrm{Ker}\, D = \mathrm{Ker}\, D^2$, da cui, detto $H^r = \mathrm{Ker}\, \Delta \cap \Lambda^r(M)$ lo spazio delle r-forme armoniche, si ottiene $\mathrm{Ker}\, D = \Sigma H^r$.

Bisogna osservare che D non conserva i gradi delle forme; se si pone $\Lambda^+ = \sum_{r \text{ pari}} \Lambda^r$ e $\Lambda^- = \sum_{r \text{ dispari}} \Lambda^r$, restano definiti da D due operatori $D^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^-$, $D^- : \Lambda^- \to \Lambda^+$, aggiunti l'uno dell'altro, tali che $D = D^+ + D^-$, e si ha $\mathrm{ind}(D^+) = \dim \mathrm{Ker}\, D^+ - \dim \mathrm{Ker}\, D^-$, ossia

$$\mathrm{ind}(D^+) = \sum_{r \text{ pari}} \dim H^r - \sum_{r \text{ dispari}} \dim H^r = \sum_r (-1)^r \dim H^r. \tag{4}$$

Poiché il teorema di Hodge afferma che gli spazi delle forme armoniche sono isomorfi ai corrispondenti gruppi di coomologia su M : $H^r \simeq H^r(M; \mathbf{R})$, dalla (4) e dalla definizione di caratteristica di Eulero-Poincaré (cfr. p. 670) segue $\chi(M) = \mathrm{ind}(D^+)$.

6. *Sviluppi moderni della geometria algebrica.*

Gli *Eléments de géométrie algébrique* (*EGA*) di Alexandre Grothendieck, scritti negli anni '60 con la collaborazione di Jean Dieudonné, si propongono di rifondare la geometria algebrica, proponendo all'attenzione dei matematici nuove tecniche e nuovi punti di vista; da quest'opera parte il presente esame degli sviluppi moderni della geometria algebrica. Nell'introduzione alla prima edizione [1960] si trova la dedica del trattato a Oscar Zariski e André Weil, quali ispiratori del «nuovo corso» della geometria algebrica. Perché la scelta di questi due matematici? Il tentativo di spiegare questo fatto sarà l'occasione di un riesame di varie tematiche della geometria algebrica, viste anche in luce storica con particolare riferimento alla scuola geometrica italiana della seconda generazione.

6.1. L'influenza di André Weil.

Per quanto riguarda Weil, Grothendieck afferma chiaramente di essere stato respinto dall'aridità del suo classico trattato *Foundations of Algebraic Geometry* e di aver perciò voluto scrivere gli *EGA* per rendere accessibili ai giovani e fare apprezzare le tecniche necessarie a studiare (e a risolvere, se possibile) le celebri «congetture di Weil» in geometria diofantina. In effetti il piano dell'opera (mai completata) comprende come XIII e ultimo capitolo lo studio della coomologia di Weil e quindi la discussione delle congetture. Va detto che, mentre la parte conclusiva degli *EGA* non è mai uscita, le congetture di Weil sono state completamente risolte da Deligne, allievo di Grothendieck, proprio con l'impiego delle tecniche introdotte negli *EGA* e nell'altra fondamentale opera redatta da Grothendieck insieme con numerosi suoi allievi, il *Séminaire de géométrie algébrique* (*SGA*).

Anche se le dimostrazioni hanno richiesto un quarto di secolo, da quando André Weil, in un suo celebre articolo [1949] enunciò le congetture sul numero di soluzioni di certe equazioni a coefficienti sopra un corpo finito, si può tentare di fornire alcune informazioni piú dettagliate e comprensibili su tali congetture.

Si consideri in primo luogo un corpo finito $k = F_q$ avente q elementi e la sua chiusura algebrica $\bar{k}$; data una varietà algebrica X sopra k si può costruire la varietà $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, ottenuta per estensione degli scalari da k a $\bar{k}$ (e quindi $\bar{X}$ è una $\bar{k}$-varietà). Per ogni intero $r \geq 1$ si indichi con k_r l'estensione di k, entro $\bar{k}$, avente esattamente q^r elementi (cioè $k_r = F_{q^r}$). I punti di $\bar{X}$ razionali sopra k_r, cioè aventi tutte le coordinate in k_r, sono in numero finito: N_r. Si può ora definire esplicitamente la funzione Z relativa alla varietà X, che consiste in una serie di potenze nella variabile t a coefficienti razionali: $Z(X, t) = e^{(\Sigma N_r (t^r/r))}$. Le congetture di Weil riguardano la funzione $Z(X, t) = Z(t)$ nel caso in cui X sia una varietà algebrica non singolare di dimensione n definita sul corpo k; esse affermano:

a) $Z(t)$ è una funzione razionale di t, cioè è quoziente di due polinomi a coefficienti razionali;

b) $Z(t)$ si può scrivere nel modo seguente (analogo dell'ipotesi di Riemann):

$$Z(t) = P_1(t)...P_{2n-1}(t)/P_0(t)...P_{2n}(t)$$

dove si ha: $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$, $P_i(t) = \Pi_j(1 - a_{ij}t)$, con gli a_{ij} interi algebrici aventi norma uguale a $q^{i/2}$, e inoltre $P_i(t)$ ha coefficienti interi, per ogni $i = 1, ..., 2n-1$;

c) esiste un opportuno intero E tale che $Z(t)$ soddisfa all'equazione funzionale $Z(1/q^n t) = \pm q^{nE/2} t^E Z(t)$;

d) se vale *b*) si può considerare l'i-esimo numero di Betti $B_i(X)$ = grado del polinomio $P_i(t)$. Allora si ha: $E = \Sigma(-1)^i B_i(X)$. Se poi si suppone che X si ottenga per riduzione modulo l'ideale primo $\mathfrak{P}$ da una varietà definita sopra un anello R di numeri algebrici, allora $B_i(X)$ coincide con il rango del gruppo di coomologia $H^i(Y_h; \mathbf{Z})$, essendo Y_h lo spazio analitico associato alla varietà algebrica $Y \times_R \mathbf{C}$, dove $\mathbf{C}$ è il corpo complesso (cfr. § 6.4).

È proprio nell'introduzione alla seconda edizione degli *EGA* (1971) che l'autore, pur omettendo la dedica a Zariski e Weil, spiega in che senso si è ispirato a quest'ultimo.

La geometria classica ha come oggetto lo studio delle soluzioni di certi sistemi di equazioni a coefficienti in un corpo, generalmente complesso. Tale corpo resta fissato una volta per tutte, cioè i «punti» di cui si occupa la geometria hanno coordinate scelte in tale corpo.

Solo verso gli anni '40, con Weil (ma anche Zariski, Chevalley e poi Kähler, per non citare che i maggiori), si afferma l'idea di cambiare il corpo base. Ad esempio le congetture di Weil coinvolgono contemporaneamente un certo corpo finito k, la sua chiusura algebrica $\bar{k}$ e altri corpi intermedi fra questi; altre ricerche richiedono il passaggio da un corpo valutato al suo completamento. Tuttavia questo ricorso al cambio di base è in qualche modo «mascherato dal partito preso di restringersi una volta per tutte a sottocorpi di un corpo fissato algebricamente chiuso abbastanza grande (il corpo universale), il che fa restare ancora vicini al punto di vista classico in cui il corpo $\mathbf{C}$ aveva la stessa funzione» [Grothendieck e Dieudonné 1960, ed. 1971 p. 6]. Negli *EGA* ci si libera da questo limite considerando estensioni del corpo base k che siano arbitrarie, anche soltanto anelli e non necessariamente corpi, tantomeno scelti all'interno di un insieme prefissato. È un aspetto centrale nella geometria algebrica moderna il fare astrazione dalle proprietà particolari delle soluzioni di un sistema a coefficienti in un dato corpo k, per considerare invece le soluzioni a coefficienti in ogni k-algebra k'; ha poi notevole rilievo lo studio delle proprietà che sono stabili per «cambio di base». Ciò risulta chiaro dal seguente

Esempio.

Sia k un corpo di caratteristica $p \neq 0$ e a un suo elemento; dato il polinomio $f(x, y) = x^p + y^p - a$, l'insieme dei suoi zeri è una curva piana definita sopra il corpo k. È chiaro che, se a ammette radice p-esima b in k (cioè se $a = b^p$ con $b \in k$), il polinomio f è riducibile, in quanto si ha $x^p + y^p - a = (x + y - b)^p$; se invece a non ammette radice p-esima in k, il polinomio è irriducibile. Ciò significa che, se il corpo k è imperfetto, cioè contiene elementi a senza radice p-esima in k, una curva su k del tipo ora indicato è irriducibile, mentre diventa riducibile non appena si passa a una qualsiasi estensione k' di k che contenga $b = \sqrt[p]{a}$. Cosí ad esempio il passaggio alla chiusura algebrica $\bar{k}$ trasforma la curva irriducibile in una retta contata p volte. Non solo: l'anello delle coordinate $A = k[x, y]/(f)$ della curva è un anello regolare, nel senso che ogni punto della curva si ottiene, almeno localmente, intersecandola con una sola altra curva del piano; ciò si esprime anche dicendo che tutti i punti della curva sono semplici (o non singolari, cfr. § 3.2). Tuttavia basta passare alla chiusura algebrica $\bar{k}$ (o a qualsiasi corpo intermedio contenente $b = \sqrt[p]{a}$) per ottenere una curva spezzata in p rette coincidenti e, quindi, dotata solo di punti multipli. Questo fatto suggerisce di studiare le curve che sono dotate di punti semplici non soltanto nello speciale corpo base fissato inizialmente, ma anche nella chiusura algebrica o in altre estensioni, cioè le curve «assolutamente non singolari» o «lisce».

Vari altri aspetti delle congetture di Weil, oltre al cambio del corpo di base, hanno influenzato gli *EGA* e tutta la geometria algebrica moderna. Un'idea centrale era nota a Weil quando studiava il numero di soluzioni di certe equazioni su corpi finiti. Data la varietà X definita sopra $k = F_q$ e la varietà $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ ottenuta per cambio di base, si può considerare il cosiddetto morfismo di Frobenius $f : \bar{X} \to \bar{X}$, che trasforma il punto P di coordinate (a_i), dove $a_i \in \bar{k}$, nel punto $f(P)$ di coordinate (a_i^q). Non è difficile vedere che le coordinate di P appartengono al corpo $k_r = F_{q^r}$ avente q^r elementi se e soltanto se P è un punto fisso del morfismo f^r, ottenuto iterando r volte f. Ora, grazie a una formula di Lefschetz, si può calcolare il numero di tali punti fissi in termini di gruppi di coomologia (cfr. anche § 4.3), il che permette di tradurre il problema iniziale in un altro problema, apparentemente molto diverso, consistente nel calcolo di certi gruppi di coomologia, o nello studio di proprietà di questi ultimi.

Va detto che la quinta congettura di Weil, soggiacente a quelle esplicitamente formulate, afferma che deve esistere una coomologia a coefficienti in un corpo di caratteristica nulla adatta ad affrontare i suoi problemi diofantini. In effetti uno dei progressi piú recenti della geometria algebrica consiste nell'introduzione della coomologia l-adica; i contributi di Grothendieck e di Michael Artin in questo settore hanno permesso a Deligne di risolvere (1974) in modo completo le congetture di Weil. Ecco dunque un altro contributo fondamentale di Weil: l'impulso a introdurre sistematicamente nella geometria algebrica tecniche coomologiche, precedentemente usate soprattutto in topologia, da cui provengono, e nell'ambito della teoria delle funzioni di variabili complesse.

6.2. Tecniche topologiche in geometria algebrica: fasci e coomologia.

La nozione d'insieme algebrico (§ 3.5) si introduce in termini di ideali nell'anello dei polinomi $k[x_1, ..., x_n]$ (k sarà ora algebricamente chiuso) e molte proprietà di tali insiemi si provano studiando l'anello delle coordinate (o funzioni regolari); tale anello per la geometria algebrica classica è una k-algebra finitamente generata e ridotta, cioè priva di elementi nilpotenti (per il *Nullstellensatz*); inoltre si può provare che tutte le k-algebre ridotte e finitamente generate sono anelli di coordinate di insiemi algebrici; qualora si tratti di k-algebre integre (prive di divisori dello 0), esse corrispondono alle varietà algebriche (insiemi algebrici irriducibili). Negli anni '20-40 la scuola geometrica tedesca (Emil Artin, Emmy Noether, Van der Waerden) considera la geometria algebrica essenzialmente come studio degli ideali negli anelli di polinomi.

Il fatto nuovo dell'introduzione di una struttura topologica nelle varietà algebriche risale a Zariski, che fa uso di una speciale topologia, in seguito detta «topologia di Zariski», nello studio algebrico delle superfici di Riemann astratte. Nel 1949 Weil osserva che tale topologia può essere introdotta in generale sopra una varietà anche astratta; infine nel 1954 Serre (*Faisceaux algébriques cohérents*, o *FAC*) sostituisce sistematicamente la topologia usuale (dei complessi) con la topologia di Zariski, applicabile a una varietà qualunque.

Nel caso affine, sia V una varietà definita sopra il corpo base k; allora gli insiemi chiusi della topologia di Zariski sono tutti e soli i sottoinsiemi algebrici di V; è facile vedere che si ottiene uno spazio topologico, però di un tipo molto particolare, perché non soddisfa in generale all'assioma di separazione visto nel § 4.1, valido invece nella topologia usuale del piano reale o complesso. Se V è una varietà definita sul corpo reale o complesso, essa è fornita dunque di due topologie, quella di Zariski e quella ordinaria; quest'ultima consente l'impiego di metodi molto potenti (i metodi trascendenti), in cui intervengono operazioni non algebriche come il calcolo di integrali, mentre la prima permette di trattare con metodi topologici anche le varietà di caratteristica positiva. Salvo avviso in contrario la topologia di una varietà sarà d'ora in poi quella di Zariski.

Fasci e schemi. La seconda idea innovatrice di Serre consiste nell'usare in geometria algebrica la nozione di fascio di anelli locali (cfr. il § 3.8 dell'articolo «Applicazioni» di questa stessa *Enciclopedia*), già sperimentata in geometria analitica. In effetti la struttura topologica da sola «dimentica» in certo senso le proprietà algebriche dell'anello delle funzioni regolari sulla varietà. Il fascio strutturale O_V della varietà V associa a ogni aperto U (complementare di un sottoinsieme algebrico) l'anello $A(U)$ delle funzioni razionali sulla varietà e regolari (cioè prive di poli) sull'aperto. La spiga del fascio nel punto P della varietà, limite diretto di tutti gli anelli $A(U)$ al variare di U nell'insieme degli intorni di P, coincide con l'anello locale $A_{\mathfrak{m}}$, dove $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di P nell'anello delle coordinate A (si ricordi che, su un corpo algebricamente chiuso, i punti corrispondono agli ideali massimali per il *Nullstellensatz*).

Dal nuovo punto di vista una varietà algebrica affine è uno spazio topologico isomorfo a quello ora descritto, quando nell'isomorfismo si tenga conto sia della topologia sia del fascio. Una varietà algebrica qualsiasi è uno spazio topologico munito di un fascio di anelli locali, localmente isomorfo (rispetto alla topologia di Zariski) a una varietà algebrica affine; naturalmente si dovrà tener conto, nell'isomorfismo, del fascio di anelli locali. Nel caso di due varietà algebriche entrambe affini l'isomorfismo significa isomorfismo fra gli anelli delle coordinate. Una corrispondenza birazionale fra varietà si può definire come un isomorfismo fra due aperti densi delle due varietà (conservandosi cosí, e precisandosi, il principio della biunivocità con eccezioni, che possono presentarsi nei punti fuori dei due aperti isomorfi).

L'introduzione del fascio, già nota e utilizzata in altri settori della matematica ma non ancora in geometria algebrica, permette dunque di «incollare» agevolmente varietà affini, ottenendo le varietà algebriche qualsiasi (e fra queste, come caso particolare, le varietà proiettive). A questo punto riesce anche naturale (ed estremamente fecondo) trasportare nella geometria algebrica il macchinario topologico associato ai fasci, e cioè la coomologia (cfr. l'articolo «Differenziale» di questa stessa *Enciclopedia*). A Serre si devono fra l'altro i primi teoremi di annullamento della coomologia delle varietà affini e proiettive e il celebre teorema di dualità, che è uno dei piú profondi risultati di tipo coomologico (ed è strettamente collegato a Riemann-Roch).

Il punto di vista di Serre è reso ancora piú radicale negli *EGA*, dove uno schema affine si costruisce a partire non da un quoziente dell'anello dei polinomi, ma da un arbitrario anello commutativo con unità; precisamente, detto $\mathrm{Spec}(A)$ l'insieme di tutti gli ideali primi dell'anello A, vi s'introduce la topologia di Zariski considerando chiusi gli insiemi $V(\mathfrak{J})$ formati da tutti gli ideali primi contenenti l'ideale fissato $\mathfrak{J} \subseteq A$. Il fascio strutturale O di $\mathrm{Spec}(A)$ ha come spiga nel punto x, corrispondente all'ideale primo $\mathfrak{P}$, l'anello locale $A_{\mathfrak{P}}$, localizzato di A in $\mathfrak{P}$, mentre all'aperto $D(f) = \mathrm{Spec}(A) - V(f)$ associa, per ogni $f \in A$, l'anello A_f, localizzato di A nell'insieme $S = (1, f, f^2, ..., f^n, ...)$ (tali $D(f)$ formano una base degli aperti). Lo spazio topologico $\mathrm{Spec}(A)$ fornito di tale fascio, si chiama schema affine; il piú generale schema si ottiene incollando piú schemi affini (anche in numero infinito). Piú esattamente uno schema è uno spazio topologico dotato di un fascio di anelli locali, localmente isomorfo a uno schema affine (ove si tenga conto della topologia e del fascio). Nel linguaggio degli schemi si ritrova lo spazio affine n-dimensionale $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ come $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[y_1, ..., y_n])$, dove le y sono variabili indipendenti; i nuovi punti dello spazio affine sono tutti gli ideali primi di $\mathbf{C}[y_1, ..., y_n]$ e fra questi gli ideali massimali corrispondono ai punti nel senso classico, per il *Nullstellensatz* di Hilbert (cfr. § 3.5). Gli insiemi algebrici affini sono ora del tipo $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[y_1, ..., y_n]/\mathfrak{J})$, dove $\mathfrak{J}$ è un ideale qualsiasi dell'anello dei polinomi. Il fascio strutturale $O_{\mathbf{A}^n}$ associa all'aperto $D(f) = \mathbf{A}^n - V(f)$, per ogni $f \in \mathbf{C}[y_1, ..., y_n]$, l'anello $\mathbf{C}[y_1, ..., y_n]_f$ localizzato di $\mathbf{C}[y_1, ..., y_n]$ nelle potenze di f; gli elementi di tale anello sono le frazioni $g(y)/f^r$, dove $g(y)$ è un polinomio qualsiasi nelle y e $r \in \mathbf{N}$. Incollando n spazi affini si ottiene lo spazio proiettivo n-dimensionale

$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, che è uno dei piú semplici esempi di schema non affine (cioè non è per $n \geq 1$ spettro di alcun anello).

Lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ *come schema.* Nello spazio affine $(n+1)$-dimensionale $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x_0, \ldots, x_n]) = \mathrm{Spec}(A)$, si consideri l'insieme di tutti gli ideali primi $\mathfrak{P}$ che siano omogenei, cioè generati soltanto da polinomi omogenei; ciò significa che, se un elemento $f \in A$ appartiene a un tale $\mathfrak{P}$, allora tutte le componenti omogenee di f stanno in $\mathfrak{P}$; inoltre si vede facilmente che $\mathfrak{P}$ è necessariamente contenuto nell'ideale $\mathfrak{A}_+$ di tutti gli elementi di grado maggiore od uguale a 1. Si indichi con $\mathrm{Proj}(A)$ l'insieme di tali primi da cui sia escluso $\mathfrak{A}_+$ stesso. La topologia di Zariski di $\mathrm{Spec}(A)$ induce sopra $\mathrm{Proj}(A)$ una topologia: gli aperti della base $D_+(f) = D(f) \cap \mathrm{Proj}(A)$ sono formati dai primi omogenei $\mathfrak{P}$ che non contengono f, dove f varia nell'insieme degli elementi omogenei di $\mathfrak{A}_+$. Non è difficile vedere che gli aperti $D_+(x_i)$ formano già una base degli aperti. Per ogni $i = 0, \ldots, n$, si consideri l'anello A_{x_i}, localizzato di A nelle potenze di x_i e si ponga: grado di a/x_i^s = grado di $a - s$. Gli elementi di grado 0 (cioè le frazioni omogenee a/x_i^s con grado di $a = s$) formano un sottoanello che si denota $A_{(x_i)}$. Si definisca ora la seguente applicazione $\varphi : D_+(x_i) \to \mathrm{Spec}(A_{(x_i)})$, che al primo omogeneo $\mathfrak{P}$ associa il primo $\mathfrak{P}'$ formato da tutte e sole le frazioni a/x_i^s dove $a \in \mathfrak{P}$ è omogeneo di grado s. Si può vedere che φ è un omeomorfismo di spazi topologici; pertanto si può trasferire sopra $D_+(x_i)$ la struttura di schema affine che ha $\mathrm{Spec}(A_{(x_i)})$. Inoltre l'anello $A_{(x_i)}$ è isomorfo all'anello $\mathbf{C}[x_0, \ldots, x_n]/(x_i - 1)$, cioè all'anello dei polinomi che si ottiene eliminando la variabile x_i; la qual cosa significa che $D_+(x_i)$ altro non è che uno spazio affine n-dimensionale. Se $\mathfrak{P}$ è un punto di $D_+(x_i)$ l'anello locale in $\mathfrak{P}$ coincide con l'anello locale di $\mathrm{Spec}(A_{(x_i)})$ in $\mathfrak{P}'$ sopra definito, cioè con l'anello $A_{(\mathfrak{P})}$ delle frazioni omogenee aventi denominatore non in $\mathfrak{P}$. Tutta la precedente costruzione naturalmente si applica a qualunque aperto $D_+(f)$, che risulterà affine e isomorfo a $\mathrm{Spec}(A_{(f)})$. I vari aperti affini $D_+(x_i)$ si possono unire in uno schema poiché i fasci strutturali si possono incollare nelle intersezioni che sono gli aperti $D_+(x_i x_j)$. Si può in realtà verificare che $D_+(x_i x_j)$ si identifica allo schema affine indotto da $\mathrm{Spec}(A_{(x_i)})$ sopra $\mathrm{Spec}(A_{(x_i x_j)})$ e anche con lo schema affine indotto da $\mathrm{Spec}(A_{(x_j)})$ sopra $\mathrm{Spec}(A_{(x_j x_i)})$: ciò significa che $\mathrm{Proj}(A)$ è appunto uno schema.

Le varietà proiettive si possono ottenere con analoga costruzione, a partire dall'anello $B = \mathbf{C}[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{J}$, dove $\mathfrak{J}$ sia un qualsiasi ideale omogeneo diverso da $\mathfrak{A}_+$; si tratterà ancora di schemi ottenuti per incollamento di n schemi affini.

Si noti che ogni varietà proiettiva sui complessi è munita di due topologie, quella naturale di $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ e quella di Zariski; questo fatto (di cui si riparlerà al § 6.4) implica la possibilità di studiare la geometria algebrica da due punti di vista diversi, con i metodi della geometria differenziale e dell'analisi complessa, oppure algebricamente. Qualora si consideri però lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^n(k)$ (definito in modo analogo a $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sopra un corpo base qualunque k) solo il metodo algebrico è consentito, mancando la topologia complessa.

Oltre al fascio strutturale si possono considerare altri fasci sopra uno schema; questi possono essere definiti localmente sui vari pezzi affini, purché sia possibile l'incollamento, e sono la controparte topologica del concetto algebrico di A-modulo. Anzi, per uno schema affine $\mathrm{Spec}(A)$, c'è un'equivalenza fra la categoria degli A-moduli e quella dei fasci cosiddetti «quasi coerenti» sopra $\mathrm{Spec}(A)$ (cfr. anche l'articolo «Dualità» di questa stessa *Enciclopedia*). Si apre qui la strada all'impiego massiccio di tecniche topologiche, come la coomologia o, piú esattamente, le coomologie, essendovi numerose possibilità alternative a seconda della problematica e degli scopi (per la definizione di coomologia si veda anche l'articolo «Differenziale» di questa stessa *Enciclopedia*). Come si vedrà nel § 6.4, la coomologia ha una posizione centrale in tutta la geometria algebrica moderna, permettendo d'interpretare agevolmente e di generalizzare importanti concetti della geometria algebrica classica (cfr. anche § 6.3).

Le tecniche topologiche e coomologiche in geometria comportano lo sviluppo in un'ulteriore direzione, cioè verso la teoria delle categorie e la logica. Già l'introduzione alla seconda edizione degli *EGA* segna questa svolta, presentando la geometria algebrica come studio di un certo funtore; e, mentre il capitolo 0 della prima edizione cominciava con richiami algebrici, il nuovo capitolo 0 si apre con la teoria dei funtori rappresentabili. In questa direzione si collocano naturalmente la teoria degli spazi algebrici di Michael Artin e la teoria dei topoi, che, oltre a sviluppi geometrici, ha anche veri e propri sviluppi logici e categoriali, ad esempio nelle ricerche di Lawvere.

Fasci, divisori, classe canonica in $\mathbf{P}^n(k)$. Le nozioni sui fasci e la coomologia in $\mathbf{P}^n(k)$ qui di seguito esposte saranno utili per la lettura dei §§ 6.3 e 6.4. Un divisore D sopra $\mathbf{P}^n(k)$ si assegna nel modo seguente: si fissa un ricoprimento aperto (per la topologia di Zariski, unica possibile se $k \neq \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$) $(U_i)_{i \in I}$ e per ogni $i \in I$ si sceglie una funzione razionale f_i sopra U_i ivi non nulla identicamente; gli elementi f_i sono soggetti alla condizione che, per ogni $i \neq j$, f_i/f_j e f_j/f_i sono funzioni razionali prive di zeri e di poli sopra $U_i \cap U_j$. Se si può scegliere il ricoprimento ridotto al solo $\mathbf{P}^n(k)$ e quindi una sola funzione razionale f che definisca il divisore, questo si dice principale. Due divisori D e D' si dicono linearmente equivalenti se il divisore $D - D'$, ottenuto localmente mediante il quoziente delle rispettive funzioni f_i, coincide con un divisore principale. Il divisore D è positivo o effettivo se le sue funzioni locali f_i sono regolari sopra U_i, per ogni i, cioè non hanno poli in U_i. Non è difficile persuadersi che un divisore effettivo altro non è che un sottoschema chiuso di dimensione $n - 1$ (codimensione 1), unione di sottoschemi chiusi e irriducibili tutti di codimensione 1; D è semplicemente definito localmente dalle equazioni $f_i = 0$. Ad esempio, nel caso $n = 2$, i divisori positivi sono le curve del piano, nel caso $n = 3$, le superfici dello spazio. A ogni divisore D sopra $\mathbf{P}^n(k)$ si può associare il fascio coerente $O_{\mathbf{P}^n(k)}(D) (= O(D))$, definito localmente come l'$O(U_i)$-modulo avente come unico generatore $1/f_i$; si tratta dunque di un fascio localmente libero e di rango 1 (detto anche invertibile) contenuto nel fascio delle funzioni razionali. La corrispondenza divisore-fascio trasforma divisori linearmente equivalenti in fasci isomorfi e viceversa.

Dato un divisore D sopra $\mathbf{P}^n(k)$ si può definire il sistema lineare completo generato da D come l'insieme $|D|$ di tutti i divisori equivalenti a D ed effettivi. Ad esempio, una ipersuperficie S di $\mathbf{P}^n(k)$ di equazione omogenea $F=0$ avente grado d genera il sistema lineare completo $|S|$ che contiene tutte e sole le altre ipersuperfici dello stesso ordine. Il sistema lineare $|D|$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle sezioni globali del fascio $O(D)$, esclusa la sezione nulla, quando s'identifichino due sezioni che differiscono per un fattore moltiplicativo non nullo in k. Siccome tale identificazione significa che lo spazio vettoriale delle sezioni globali viene considerato come spazio proiettivo, la dimensione di quest'ultimo è la dimensione di $|D|$. Si consideri ad esempio il sistema lineare $|S|$ di tutte ipersuperfici di un dato ordine d in $\mathbf{P}^n(k)$; allora il fascio $O(S)$ è isomorfo al fascio $O(d)$, definito dalla condizione di avere, sull'aperto $D_+(x_i)$, come $k[x_0, ..., x_n]_{(x_i)}$-modulo delle sezioni globali quello generato dai polinomi omogenei di grado d. Pertanto le sezioni globali di tale fascio formano uno spazio vettoriale (su k), che ha dimensione $\binom{n+d}{n}$; cosí $\dim|S| = \binom{n+d}{n} - 1$.

Differenziali e classe canonica di $\mathbf{P}^n(k)$. Se A è una k-algebra commutativa si può definire il modulo dei differenziali $\Omega_{A/k}$ nel modo seguente: nell'A-modulo libero M generato dagli elementi dx, al variare di x in A, sia N il sotto-A-modulo generato dalle relazioni $d(x+y)=dx+dy$ e $d(xy)=xdy+ydx$; allora $\Omega_{A/k}=M/N$. In altre parole, ad ogni $x\in A$ resta associato $dx\in\Omega_{A/k}$, in modo tale che l'operatore d si comporti come una derivazione rispetto a somma e prodotto (è in realtà una derivazione astratta).

Per ogni aperto affine $U=\mathrm{Spec}(A)$ è definito il modulo dei differenziali $\Omega_{A/k}$. La collezione dei moduli $\Omega_{A/k}$ dà luogo al fascio Ω dei differenziali sopra $\mathbf{P}^n(k)$, che è un $O_{\mathbf{P}^n(k)}$-modulo localmente libero di rango n, cioè isomorfo localmente alla somma diretta di n copie di $O_{\mathbf{P}^n(k)}$. Ha quindi senso considerare il fascio $\omega=\omega_{\mathbf{P}^n(k)}=\Lambda^n\Omega$ (n-esima potenza esterna), che si chiama fascio canonico ed è localmente libero di rango 1. Un qualunque divisore K associato al fascio canonico si dice divisore canonico dello spazio proiettivo e $|K|$ è il sistema canonico di $\mathbf{P}^n(k)$. Si può dimostrare che il fascio canonico è isomorfo al fascio $O(-n-1)$, inverso del fascio $O(n+1)$ (e cioè tale che $O(-n-1)\otimes O(n+1)$ sia isomorfo a $O(0)=O_{\mathbf{P}^n}$). Quindi il sistema canonico $|K|$ è, per ogni $n\geq 1$, vuoto, essendo $O(l)$ privo di sezioni globali non nulle per l negativo.

Naturalmente tutte le costruzioni precedenti, con qualche difficoltà di dettaglio, si applicano a qualunque varietà proiettiva. Si deve tuttavia notare che una varietà proiettiva X, anche priva di singolarità, può avere la classe canonica non vuota e variamente complicata. Anzi, per ogni m intero positivo si può considerare la classe $|mK|$ dei divisori equivalenti a mK ed effettivi: il numero $P_m=\dim|mK|+1$ è un importante invariante birazionale numerico di X, detto m-esimo plurigenere di X (cfr. §§ 6.3 e 6.4), introdotto da Enriques.

Coomologia dei fasci coerenti su $\mathbf{P}^n(k)$. I gruppi di coomologia di uno schema affine $\mathrm{Spec}(A)$ si possono calcolare esplicitamente quando A sia un anello noetheriano; si può provare che l'i-esimo gruppo $H^i(\mathrm{Spec}(A); \mathfrak{F})$ è nullo per ogni $i>0$ e per ogni fascio quasi coerente $\mathfrak{F}$, mentre $H^0(\mathrm{Spec}(A); \mathfrak{F})$ coincide con il modulo delle sezioni globali di $\mathfrak{F}$. La coomologia di Čech permette di fare il calcolo dei gruppi di coomologia anche per gli spazi proiettivi (dove i risultati sono meno banali). Sia $U=(U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto affine di $\mathbf{P}^n=\mathbf{P}^n(k)$ con un buon ordinamento per I. Per ogni $(i_0, ..., i_p)\in I^{p+1}$ si ponga $U_{i_0...i_p}=U_{i_0}\cap ... \cap U_{i_p}$. Se $\mathfrak{F}$ è un fascio coerente su $\mathbf{P}^n$ (cioè se localmente i moduli delle sezioni sono finiti sopra $k[x_0, ..., x_n]_{(x_i)}$) si definisce

$$C^p(U, \mathfrak{F}) = \prod_{i_0<i_1<...<i_p} \mathfrak{F}(U_{i_0...i_p})$$

(ove Π = prodotto diretto). L'applicazione $d_p: C^p\to C^{p+1}$, definita sull'aperto $U_{i_0...i_p}$ da

$$(d_p a)_{i_0...i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k a_{i_0...\check{i}_k...i_{p+1}}$$

(con $\check{i}_k$ viene indicata l'esclusione di i_k dalla somma), verifica $d_{p+1}\circ d_p=0$ e quindi è possibile definire (cfr. § 4.3) il p-esimo gruppo di coomologia $H^p(\mathbf{P}^n; \mathfrak{F})=\mathrm{Ker}\, d_p/\mathrm{Im}\, d_{p-1}$. Si può fare il calcolo diretto per i fasci $O(d)$ (con $d\in\mathbf{Z}$), ottenendo:

$H^i(\mathbf{P}^n; O(d))=0$ se $i=0$ e $d<0$, oppure $0<i<n$ e d qualunque, oppure $i=n$ e $d<0$, oppure $i>n$;

$H^i(\mathbf{P}^n; O(d))$ = spazio vettoriale delle forme di grado d nelle variabili $x_0, ..., x_n$ se $i=0$ e $d\geq 0$;

$H^i(\mathbf{P}^n; O(d))$ = duale dello spazio delle forme di grado $-d-n-1$ nelle variabili $x_0, ..., x_n$ se $d\leq -n-1$ e $i=n$.

In particolare si ha: $H^0(\mathbf{P}^n; O_{\mathbf{P}^n})=k$; siccome H^0 è l'insieme delle sezioni globali, ciò significa che solo le costanti sono sezioni globali sullo spazio proiettivo $\mathbf{P}^n=\mathbf{P}^n(k)$. Analogo calcolo (con risultati diversi ovviamente) può essere fatto per ogni varietà proiettiva X.

Sarà utile nel seguito sapere che i generi aritmetico e geometrico di una varietà proiettiva si possono definire in termini coomologici. Ad esempio, per una superficie algebrica $X\subseteq\mathbf{P}^n(k)$

$$p_a = \dim_k H^2(X; O_X) - \dim_k H^1(X; O_X)$$
$$p_g = \dim_k H^0(X; \omega_X) \qquad (\omega_X = \text{ fascio canonico}).$$

6.3. La geometria algebrica italiana.

Prima di affrontare l'esame della figura di Zariski è opportuno un breve riesame della geometria algebrica italiana, che costituisce per molti aspetti il

punto di partenza dell'opera di Zariski e condiziona buona parte della geometria d'oggi.

Negli anni fra il 1890 e il 1940 la geometria algebrica è dominata dal punto di vista birazionale, iniziato da Riemann ma enunciato con chiarezza programmatica solo nel programma di Erlangen (1872), che indica esplicitamente il gruppo delle trasformazioni birazionali. Soprattutto i geometri algebrici italiani della seconda generazione (Castelnuovo, Enriques e poi Severi) sono convinti assertori dell'impostazione birazionale e in questa direzione ottengono notevolissimi risultati per le varietà su **C**. Che cosa significa esattamente geometria birazionale per gli italiani? Si tratta soprattutto di due problematiche:

1) la ricerca degli invarianti numerici birazionali, cioè di quei caratteri numerici associati a una varietà algebrica complessa che si conservano nelle trasformazioni birazionali. Ad esempio per le curve si è visto che il genere p è un invariante birazionale numerico, nel senso che due curve sono birazionalmente equivalenti soltanto se hanno lo stesso genere;
2) classificazione delle varietà algebriche, cioè suddivisione delle varietà algebriche aventi una data dimensione n in classi, ciascuna contenente tutte le varietà birazionalmente equivalenti a una data varietà e caratterizzazione delle proprietà di ogni classe di equivalenza.

Nel caso delle curve algebriche la cosa è semplice, in quanto due curve sono birazionalmente equivalenti soltanto se hanno lo stesso genere; inoltre due curve non singolari birazionalmente equivalenti sono addirittura isomorfe (cioè si ottengono l'una dall'altra con una trasformazione birazionale biregolare). Pertanto entro ogni classe di birazionalità c'è una sola curva non singolare, il che rende il problema della classificazione di carattere elementare. I problemi 1) e 2) si presentano entrambi molto piú difficili per le superfici algebriche.

Già a Max Noether, intorno agli anni 1870, è noto che per le superfici si possono definire due generi, il genere geometrico p_g collegato al sistema canonico, e il genere aritmetico p_a, collegato a certe superfici aggiunte di ordine $n-4$ (dove n è l'ordine della superficie). E nel 1871 Cayley costruisce una superficie rigata in cui i due generi sono diversi, Zeuthen prova sotto qualche ipotesi l'invarianza birazionale del genere aritmetico, mentre l'invarianza del genere geometrico p_g è sostanzialmente nota a Noether. L'invarianza birazionale del genere aritmetico viene provata in generale da Enriques nel 1896, con una dimostrazione che mette in rilievo l'importanza dell'invariante birazionale $q=p_g-p_a$, detto da Enriques irregolarità della superficie. Nelle dimostrazioni d'invarianza birazionale viene fatto largo uso di proprietà anche sottili dei sistemi lineari di curve sopra una superficie e di teoremi non strettamente birazionali, come i teoremi di Bertini sul punto multiplo variabile di un sistema lineare e sulla riducibilità dei membri di un sistema lineare. Tuttavia tali teoremi, studiati per il loro interesse intrinseco dai geometri della generazione precedente (come appunto il Bertini) vengono ora visti soprattutto come strumenti per lo studio birazionale.

Anche gli studi sulle curve algebriche di Castelnuovo, Enriques, Severi sono

considerati preparatori rispetto allo studio delle superfici algebriche. Nell'ambito di queste due tematiche la scuola italiana sviluppa una gran varietà di risultati, che storicamente si articolano intorno alle problematiche seguenti.

Il teorema di Riemann-Roch. Il problema posto da Riemann consiste nell'esprimere la dimensione di un sistema lineare completo sopra una curva o una superficie algebrica in termini di caratteri numerici del sistema stesso e d'invarianti birazionali numerici della varietà ambiente. Si è vista la soluzione per le curve nel § 3.3; per una superficie il problema è molto piú complicato e viene risolto da Enriques e Castelnuovo, e poi ulteriormente perfezionato da Severi. Esso afferma che, se S è un sistema lineare completo sopra una superficie non singolare X, avente genere virtuale p, grado virtuale n, indice di specialità j e dimensione r,

$$(1) \qquad r \geq n-p+p_a+1-j,$$

dove il genere virtuale e il grado virtuale sono quelli effettivi se S è un sistema irriducibile, coincidono cioè rispettivamente con il genere della curva generica del sistema e con il numero di punti comuni a due curve nel sistema. Si noti che, per le superfici, vale soltanto una disuguaglianza: la differenza fra i due membri è la «sovrabbondanza» e il suo significato, non chiaro per i geometri italiani [cfr. anche Severi 1958, p. 36], può essere spiegato in termini coomologici come la dimensione sul corpo base k del primo gruppo di coomologia $H^1(X; O_X(D))$, dove $S=|D|$.

Caratteristiche geometriche legate all'annullarsi di invarianti birazionali numerici. Ad esempio la razionalità di una curva è caratterizzata dall'annullarsi del genere. Nel caso delle superfici la razionalità (cioè l'equivalenza birazionale con il piano proiettivo complesso) è caratterizzata dal celebre teorema di Castelnuovo: una superficie algebrica complessa non singolare è razionale se e soltanto se sono nulli il genere aritmetico p_a e il secondo plurigenere P_2 (cfr. p. 702); non è invece sufficiente l'ipotesi piú debole che siano nulli p_g e q (cioè p_g e p_a).

Anche le superfici rigate (cioè birazionalmente equivalenti al prodotto di una curva liscia per la retta proiettiva) possono caratterizzarsi mediante l'annullamento di invarianti birazionali, grazie al teorema di Enriques:

TEOREMA (Enriques). *La superficie non singolare X è rigata se e soltanto se sono nulli tutti i plurigeneri P_n, ovvero se e soltanto se è nullo il dodicesimo plurigenere P_{12}.*

Soluzione del problema di Lüroth per le superfici. Si tratta del celebre teorema di razionalità delle involuzioni piane dovuto a Castelnuovo.

Esiste in effetti una variante debole del concetto di razionalità per una varietà algebrica, nota ai geometri classici (Lüroth, Castelnuovo, Fano). Precisamente la varietà algebrica non singolare X di dimensione n è razionale se è

birazionalmente equivalente a $\mathbf{P}^n(k)$, cioè se il suo corpo delle funzioni razionali è puramente trascendente sopra k; X è invece unirazionale se il suo corpo L delle funzioni razionali è una sottoestensione di un'estensione puramente trascendente di k. Quando L abbia grado di trascendenza 1 sopra k, si può dimostrare con tecniche di teoria dei corpi abbastanza elementari (teorema di Lüroth) che L è puramente trascendente; pertanto le curve unirazionali sono razionali (ed è vero per ogni corpo base k). Nel caso di una superficie complessa X si può dedurre dal teorema di Castelnuovo che caratterizza le superfici razionali il fatto che ogni superficie unirazionale è razionale. Nel caso della caratteristica positiva è stato chiarito da Zariski che il teorema non vale in generale, ma solo sotto opportune ipotesi.

In dimensione maggiore di due il problema di Lüroth (dell'equivalenza fra razionalità e unirazionalità) è rimasto aperto fino a tempi recenti, nonostante il tentativo di controesempi dovuto già a Fano; solo Clemens e Griffith da una parte, Iškovskij e Manin dall'altra hanno risolto negativamente la questione, con esempi di ipersuperfici di $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$, di gradi 3 o 4 (ad esempio: $x_0^3+x_1^3+x_2^3+$ $+x_3^3+x_4^3=0$).

Classificazione delle superfici algebriche secondo le classi di birazionalità. A questo problema si dedicò soprattutto Enriques, iniziando la classificazione per i primi generi; si vedranno nel seguito gli sviluppi di questi risultati dovuti a Kodaira, Šafarevič, Mumford, Bombieri, che dovranno utilizzare un ulteriore invariante birazionale (la dimensione di Kodaira), collegato ai plurigeneri e introdotto da Šafarevič nel 1965.

Va osservato che l'estrema difficoltà di lettura dei risultati della scuola italiana dipende soprattutto dal fatto che, con il termine 'superficie' essa indica generalmente tutta la classe di birazionalità di una data superficie, con l'implicita convenzione di scegliere di volta in volta il modello piú conveniente, sia esso non singolare, come garantito dal teorema di scioglimento delle singolarità di Beppo Levi, oppure sia ottenuto da uno non singolare per proiezione e immerso in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ con ciò introducendosi alcuni tipi standard di singolarità (curve doppie nodali, con punti tripli isolati, che sono tripli anche per la superficie) [cfr. a questo proposito Mumford 1971].

La scuola geometrica italiana si avvale di varie tecniche, sia puramente geometriche, sia basate sull'analisi, come l'uso di integrali. Non si avvale però in alcun modo dei metodi e dei risultati puramente algebrici sviluppati in Germania da Max Noether, Krull, Kronecker, Hilbert, ecc.

6.4. Moderni sviluppi della problematica introdotta dalla scuola italiana.

Il materiale elaborato dalla scuola di Castelnuovo, Enriques, Severi ha avuto una notevolissima influenza sulla geometria algebrica successiva, di cui si richiamano qui i principali risultati di geometria birazionale che completano quelli classici.

In primo luogo va osservato che, nella geometria italiana, numerose intuizioni felici e idee profonde e innovatrici si sono sempre accompagnate a un'eccessiva fiducia nell'intuizione geometrica e a una scarsa attenzione alle tematiche algebriche, con il risultato di produrre una certa mancanza di rigore. Parecchie dimostrazioni di fatti oggi riconosciuti giusti sono controverse o lacunose o, almeno, incomplete. Lo stesso Castelnuovo, nell'introduzione al volume *Le superficie algebriche* di Enriques del 1949, segnala alcuni punti cruciali a suo parere privi di una dimostrazione corretta; del pari Zariski, nelle *Algebraic Surfaces* del 1935, una specie di rassegna dei risultati noti nel settore, segnala spesso difficoltà e lacune.

Negli anni tra il 1950 e il 1970 avviene un lavoro di rielaborazione dei risultati della geometria italiana, con l'utilizzazione di nuovi e raffinati strumenti presi dalla geometria differenziale, dalla topologia, dall'analisi complessa, come le tecniche coomologiche, la teoria di Hodge delle forme armoniche, ecc. Ecco una breve rassegna dei principali risultati.

Teorema di Riemann-Roch e dualità di Serre. L'introduzione della coomologia permette di scrivere il teorema di Riemann-Roch come un'uguaglianza, grazie all'interpretazione della sovrabbondanza come dimensione del primo gruppo di coomologia del fascio $O_X(D)$, D essendo un divisore del sistema lineare di cui si studia la dimensione. Detto K un divisore canonico della superficie proiettiva non singolare X, si può enunciare Riemann-Roch come segue:

$$\chi(O_X(D))=(1/2)D\cdot(D-K)+1+p_a, \tag{2}$$

dove χ indica la caratteristica di Eulero-Poincaré $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim H^i(X;O_X(D))$; si può vedere che $\dim H^0(X;O_X(D))-1$ corrisponde alla dimensione r della formula (1), $\dim H^1(X;O_X(D))$ è la sovrabbondanza, mentre $(1/2)D\cdot$ $\cdot(D-K)$ corrisponde alla differenza $n-p$ fra grado e genere virtuale ($D\cdot D$ essendo il grado). In realtà questo enunciato presuppone l'uguaglianza fra la dimensione di $H^2(X;O_X(D))$ e la dimensione di $H^0(X;O_X(D)^*\otimes\omega_X)$, dove ω_X è il fascio canonico della superficie e * significa duale. E questo fatto dipende dal teorema di dualità di Serre: per uno schema proiettivo non singolare di dimensione n tale dualità implica infatti l'uguaglianza $\dim H^i(X;\mathfrak{F})=$ $=\dim H^{n-i}(X;\mathfrak{F}^*\otimes\omega_X)$ e quindi che per una curva non singolare c'è un solo genere (cosa ben nota altrimenti ai classici).

In questo ambito coomologico va citato il celebre teorema di annullamento di Kodaira che afferma: se X è una varietà proiettiva non singolare su $\mathbf{C}$ di dimensione n e $\mathfrak{F}$ è un fascio ampio invertibile, allora $H^i(X;\mathfrak{F}\otimes\omega_X)=0$ per ogni $i>0$ e $H^i(X;\mathfrak{F}^{-1})=0$ per ogni $i<n$, i due fatti equivalendosi per la dualità di Serre. Questo teorema viene provato da Kodaira con metodi analitico-complessi e finora non ci sono dimostrazioni algebriche; anzi, in caratteristica $p>0$ ci sono controesempi. Senza entrare nei dettagli di questo profondo e difficile risultato, si ricordi che esso è collegato al classico teorema di regolarità del sistema aggiunto, provato da Picard ed esteso da Kodaira stesso.

Classificazione delle superfici algebriche. Per le superfici su corpi di caratteristica nulla i risultati completi sono dovuti a Kodaira e Šafarevič, per la caratteristica positiva (ancora con qualche esclusione) a Mumford e Bombieri.

Si è visto che per le curve una prima classificazione si ha in base al genere, mentre per le superfici ci sono difficoltà di varia natura. In primo luogo gli invarianti birazionali sono almeno due, i generi aritmetico e geometrico; in secondo luogo entro una classe di birazionalità ci possono essere piú modelli non singolari non equivalenti biregolarmente, al contrario delle curve.

Tuttavia si può limitare il problema della classificazione ai modelli minimali; in effetti è noto che, entro una classe di birazionalità di superfici non singolari, esiste sempre una superficie minimale rispetto alla relazione d'ordine determinata dai morfismi birazionali. Inoltre tale modello minimale è unico oppure nella classe di birazionalità c'è una rigata, come prova Zariski estendendo al caso di un corpo algebricamente chiuso un teorema noto ai geometri italiani per **C**. Pertanto la classificazione delle superfici può ricondursi allo studio dell'unico modello minimale entro ogni classe di birazionalità ovvero allo studio dei vari modelli per le superfici rigate.

Strumento centrale in questa teoria, oltre ai generi, è la dimensione $\varkappa$ di Kodaira; per una superficie proiettiva non singolare $\varkappa$ può assumere i valori -1, 0, 1, 2 e coincide con la massima dimensione dell'immagine di X nel morfismo determinato dalla classe nK (multiplo n-esimo della classe canonica di X), al variare di n. Ecco la discussione dei quattro casi possibili:

Caso 1: $\varkappa = -1$. Questo fatto equivale all'annullarsi di P_{12}, cioè al fatto che $12K = \varnothing$; si tratta delle superfici rigate (in particolare razionali).

Caso 2: $\varkappa = 0$. Questo fatto equivale all'annullarsi della classe $12K$ cioè $P_{12} = 1$. Si tratta di una superficie di uno dei tipi seguenti: *a*) superficie K3, con classe canonica nulla e irregolarità $q = 0$; *b*) superfici di Enriques, che hanno $p_a = p_g = 0$ e inoltre $2K = 0$; *c*) le varietà abeliane di dimensione 2, che hanno $p_a = -1$, $p_g = 1$; *d*) le superfici iperellittiche (o biellittiche), che hanno $p_g = 0$ e $p_a = -1$.

Caso 3: $\varkappa = 1$. Si tratta di certe superfici ellittiche, cioè superfici S con un morfismo (cfr. § 3.5) suriettivo su una curva liscia C avente per fibra generica una curva ellittica, e inoltre nullo l'invariante birazionale K^2.

Caso 4: $\varkappa = 2$. Sono le superfici di tipo generale, analogo in dimensione 2 delle curve di genere maggiore di 1. In questa classe ci sono quasi tutte le intersezioni complete (cfr. § 3.5) e i prodotti di curve di genere almeno 2.

Varietà analitiche complesse compatte e varietà algebriche sopra i complessi. A una varietà algebrica X definita sui complessi può essere associata una varietà analitica complessa X_h nel senso dei §§ 5.2 e 5.3; inoltre X e X_h hanno la stessa coomologia, come provato da Serre nel celebre articolo *Géométrie algébrique et géométrie analitique* o *GAGA* (1956), dove confronta appunto la geometria algebrica con quella analitica. Se si aggiunge il teorema di Chow, in base al quale le sottovarietà analitiche compatte della varietà analitica $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sono algebriche (cioè sono associate a una varietà algebrica), ne risulta la possibilità di dimostrare proprietà delle varietà algebriche con tecniche della geometria differenziale e dell'analisi complessa: forme armoniche, uso di integrali, ecc. (i metodi trascendenti). Ad esempio i teoremi di geometria algebrica di Kodaira sono generalmente ottenuti con metodi trascendenti.

Un esempio notevole di risultato algebrico provato per via trascendente è la generalizzazione a ogni dimensione del teorema di Riemann-Roch, ottenuta da Hirzebruch. Tuttavia, mentre di parecchi fatti provati per via trascendente è ignoto se esista una dimostrazione algebrica, non è questo il caso di Riemann-Roch, provato da Grothendieck per un corpo algebricamente chiuso qualsiasi.

Limitatamente al caso delle varietà complesse, il teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch è anche conseguenza (cfr. § 5.5) del teorema dell'indice di Atiyah-Singer. Ad esempio, nel caso di una curva, il carattere di Chern del divisore D è $1+D$ e la classe di Todd della curva è $1-(1/2)K$ (K = classe canonica) e allora il teorema dell'indice afferma che si ha $\chi(O_X(D)) =$ grado di $(D-(1/2)K)$; siccome grado di $K = 2p-2$, si ottiene $\chi(O_X(D)) = 1-p+$ grado di D, che è la formulazione di Serre del teorema di Riemann-Roch per le curve.

6.5. Zariski e la rifondazione della geometria algebrica.

A proposito della dedica degli *Eléments de géométrie algébrique* a Weil e Zariski, si è discusso del primo ma solo accennato per ora al secondo. Rispetto alle ricerche citate nel § 6.4, che ridimostrano o estendono con dimostrazioni rigorose fatti di geometria birazionale piú o meno noti alla geometria italiana, un posto particolare spetta a Zariski. Nella citata introduzione il suo nome è indicato soprattutto per l'articolo *Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields* (1951). Il punto di partenza di questo articolo è il cosiddetto principio di degenerazione, che, nella formulazione di Enriques, afferma che, se una varietà irriducibile V (sopra i complessi) varia in un sistema continuo e degenera, al limite, in una varietà riducibile V_0, allora V_0 è connessa. Zariski enuncia e prova il principio in una forma piú generale.

L'interesse per Grothendieck e per la geometria algebrica moderna non è costituito tanto dal risultato provato da Zariski, quanto dalle tecniche e dagli strumenti usati per arrivare alla dimostrazione, completamente nuovi rispetto al patrimonio della geometria italiana. In effetti Zariski introduce il concetto di funzione olomorfa sopra una varietà affine e proiettiva: tale funzione, localmente, è un elemento del completamento $\mathfrak{m}$-adico dell'anello delle funzioni regolari sulla varietà. Questo fatto conduce Zariski a definire il concetto di completamento $\mathfrak{m}$-adico di un anello noetheriano qualsiasi A, dove $\mathfrak{m}$ è un ideale arbitrario: si tratta sostanzialmente dell'anello delle serie formali del tipo $a_0+a_1m_1+\ldots+a_nm_n+\ldots$, dove $a_n \in A$ e $m_n \in \mathfrak{m}^n$ (dove $\mathfrak{m}^n$ è l'ideale prodotto

di $\mathfrak{m}$ per se stesso n volte). Esso coincide con l'anello delle ordinarie serie formali quando A sia $k[x_1, ..., x_n]$ e $\mathfrak{m}$ sia l'ideale delle variabili x_i, ma ha una portata molto piú vasta e generale.

L'utilizzazione del completamento $\mathfrak{m}$-adico per studiare proprietà delle varietà algebriche è in certo senso la controparte astratta delle tecniche cosiddette trascendenti; Zariski sostituisce gli sviluppi in serie e i relativi problemi di convergenza con le serie formali, con ciò inventando tecniche nuove di «discesa» dalle serie ai polinomi. Con questo lavoro si è già nel pieno della nuova impostazione zariskiana della geometria algebrica, che consiste nell'algebrizzazione della geometria, nella ricerca di strumenti algebrici adatti a studiare i problemi geometrici classici. Questa tendenza non è del tutto nuova negli anni '40 e '50, in cui opera Zariski, essendo già stata portata avanti dalla scuola tedesca (cfr. § 3.5), la cui produzione è considerata oggi di estremo interesse anche geometrico, ma è stata pienamente apprezzata e, in certo senso, rivalutata, solo dopo Zariski o, come nel caso del teorema delle sizigie (1890; cfr. l'articolo «Dipendenza/indipendenza» di questa stessa *Enciclopedia*), ancora piú tardi, quando si comincia a sviluppare l'algebra omologica di cui Hilbert è precursore. Zariski proviene dalla scuola italiana e in questo ambito, birazionale, rientrano i suoi primi lavori, all'incirca fino al 1935. Tuttavia si accorge ben presto che la mancanza di rigore rischia d'investire tutta la teoria e non soltanto qualche risultato. È dunque verso il 1935 che Zariski impone una svolta alle proprie ricerche, ritornando sui fondamenti della geometria algebrica, con quella che si potrebbe chiamare «rivoluzione culturale» all'interno della geometria. Schematicamente si possono riassumere le sue tematiche suddividendole in tre aspetti, peraltro connessi fra loro.

Ritorno ai fondamenti e algebrizzazione della geometria. Zariski ritiene che nell'algebra si debba cercare il fondamento della geometria algebrica. Avvalendosi dei risultati già raggiunti dalla scuola tedesca, riesamina dalle origini i fondamenti algebrici: la struttura degli anelli geometrici, cioè delle algebre di tipo finito sopra un corpo, i completamenti $\mathfrak{m}$-adici, le localizzazioni, le estensioni di anelli. È in certo senso significativo che, deciso a scrivere un trattato di geometria algebrica, si sia trovato di fronte un tale materiale algebrico preparatorio da convincersi a scrivere piuttosto un trattato di algebra commutativa (uno dei testi piú conosciuti e studiati anche fra i geometri algebrici a tutt'oggi [è in collaborazione con il suo allievo Pierre Samuel 1958]).

Fra gli strumenti algebrici introdotti da Zariski uno dei piú felici è la chiusura integrale di un anello (cfr. § 3.5), che permette di definire la normalizzazione di una varietà algebrica proiettiva qualsiasi, ottenuta per incollamento delle normalizzazioni affini. Essa consente, fra le altre cose, la risoluzione delle singolarità per le curve (come si è visto alla fine del § 3.5) e l'eliminazione delle curve multiple sopra una superficie, in quanto l'insieme dei punti singolari di una varietà algebrica normale (coincidente con la sua normalizzazione) ha codimensione almeno 2 e quindi è vuoto sopra una curva e contiene al piú punti isolati sopra una superficie.

Recupero di tematiche non birazionali e apertura verso nuovi problemi. Nell'introduzione alla *Commutative Algebra* scrive: «La geometria algebrica astratta si è rivelata recentemente non solo il principale campo di applicazione dell'algebra commutativa, ma anche il principale incentivo per nuove ricerche nell'algebra commutativa» [Zariski e Samuel 1958, p. v]. In effetti la nuova impostazione algebrica permette, oltreché di dare una fondazione rigorosa alla geometria birazionale, anche di porre l'attenzione a problemi piú semplici, di natura non direttamente geometrica, o di natura geometrica piú elementare: studio degli anelli locali regolari e normali, polinomio di Hilbert-Samuel e sue generalizzazioni, derivazioni e differenziali negli anelli geometrici, struttura dei completamenti, ecc. Questo è uno degli aspetti piú felici e innovatori dell'opera di Zariski, perché apre prospettive di ricerche non banali a un arco piú vasto di studiosi e in definitiva promuove un allargamento della cultura matematica.

Accanto a queste aperture non strettamente geometriche si assiste al recupero di problematiche non birazionali; fra queste, del concetto di punto semplice in geometria algebrica (caratterizzato da un criterio jacobiano valido per la caratteristica nulla e quella positiva), dei teoremi di Bertini e dei problemi di intersezioni complete e di connessione.

Sia nello studio di tematiche geometrico-birazionali che di altri problemi, è sempre presente in Zariski l'attenzione a enunciare e dimostrare i suoi risultati con la massima generalità, ove possibile unificando la caratteristica nulla e quella positiva, il caso del corpo algebricamente chiuso e quello del corpo qualunque, addirittura talvolta sostituito da un anello di valutazione discreta o un anello arbitrario. Quando la limitazione al campo complesso gli paia necessaria, indica sempre con precisione in quali dettagli delle dimostrazioni essa interviene. Ciò da una parte rinforza il rigore algebrico e, dall'altra parte, apre ancora possibilità di ricerche su certe parti algebriche delle sue dimostrazioni, allo scopo di fare delle estensioni o comunque di capire la differenza fra il caso del corpo complesso e quello generale.

Geometria birazionale e scioglimento delle singolarità. Nel settore della geometria birazionale Zariski estende alla caratteristica positiva (e prova con rigore per la caratteristica nulla) vari teoremi classici: il criterio di razionalità di Castelnuovo, precisando i limiti di validità del teorema di razionalità delle involuzioni piane; il teorema di Riemann-Roch; il teorema che caratterizza le superfici minimali nelle varie classi di equivalenza birazionale. E, a monte di tutto ciò, riesamina a fondo il concetto di trasformazione birazionale, precisando le proprietà delle trasformazioni quadratiche e monoidali e della normalizzazione.

Ma il problema piú significativo, cui dedicò la massima attenzione, è quello dello scioglimento delle singolarità. La desingolarizzazione di una varietà algebrica si ottiene attraverso trasformazioni birazionali (ad esempio quadratiche) e quindi è un classico problema birazionale. La geometria italiana conosceva

vari teoremi di scioglimento: quello di Max Noether per le curve e quello di Beppo Levi per le superfici; tuttavia lo considerava piú che altro uno strumento necessario per lo studio della classificazione delle superfici. In effetti la presenza di un modello non singolare entro ogni classe di birazionalità permette di restringere lo studio alle superfici non singolari (con qualche difficoltà relativa ai modelli minimali) o a superfici di $\mathbf{P}^3$ ottenute da queste con trasformazioni standard. Invece Zariski recupera l'interesse per la desingolarizzazione delle superfici e varietà algebriche in se stessa, come problema geometrico a sé stante. Ed ancora, oltre che sull'obiettivo finale di produrre un modello privo di singolarità, fissa l'attenzione anche sui passaggi intermedi, ad esempio i singoli scoppiamenti e le normalizzazioni (cfr. § 3.5), ricavandone anche informazioni sulla struttura dei punti singolari. Lo strumento algebrico usato da Zariski per lo scioglimento delle singolarità di una superficie algebrica e di una varietà a tre dimensioni è l'anello di valutazione. Si è visto nel § 3.2 che l'anello locale di un punto semplice di una curva è un anello di valutazione discreta (cioè il suo ideale massimale è generato da un solo elemento); inoltre si è visto nei §§ 3.3 e 3.5 che, attraverso le normalizzazioni o gli scoppiamenti, si può raggiungere, a partire da un punto singolare di una curva, un punto non singolare appartenente alla normalizzazione (o alla curva ottenuta dopo un certo numero di scoppiamenti). Pertanto il procedimento di scioglimento può essere concepito come un tentativo di raggiungere un anello di valutazione discreta, il che avviene con un passo, oppure un numero finito, a seconda della via scelta. Nella teoria delle superfici compaiono situazioni analoghe, ma piú complicate. Ad esempio è tipica la seguente: si ha una successione di punti singolari e relativi anelli locali ciascuno ottenuto dal precedente applicando uno scoppiamento seguito da normalizzazione. Si tratta di quella che viene classicamente chiamata successione di punti infinitamente vicini alla superficie di base X o, in altre parole, un ramo uscente dal punto P_0 della superficie da sciogliere. Gli anelli locali A_i della successione sono tutti contenuti nel corpo L delle funzioni razionali su X e quindi anche l'anello $A =$ limite diretto degli $A_i = \cup A_i$. Si tratta ancora di un anello locale, ma non noetheriano, che gode della seguente proprietà: dato $a \neq 0$ in L, a oppure $1/a$ sta in A. Questa condizione equivale anche a dire che, fra tutti gli anelli locali aventi L come corpo delle frazioni, non ne esiste alcuno dominante propriamente A. Dunque l'anello A, detto appunto di valutazione rispetto a L, si può pensare come limite di anelli locali integralmente chiusi, ovvero come unione di anelli locali di punti successivi infinitamente vicini. Pertanto il concetto di anello di valutazione traduce algebricamente quello di singolarità infinitamente vicina, ben noto alla geometria classica. È proprio un'analisi accurata delle valutazioni dei corpi di funzioni algebriche in due variabili che permette lo scioglimento delle superfici e varietà tridimensionali.

6.6. Continuazione dell'opera di Zariski.

Negli obiettivi che si propone Grothendieck negli *EGA* si trovano uniti come ispiratori Weil e Zariski; in realtà gl'interessi di Zariski non convergono

con quelli di Weil, dominati da tematiche profonde di teoria dei numeri e collegate alle ipotesi di Riemann.

L'opera di Zariski è variamente continuata sia sotto l'aspetto algebrico (Samuel, Chevalley, Seidenberg e Lipman) sia per quello piú propriamente geometrico (Mumford, Artin, Abhyankar, Hironaka, Hartshorne).

Hironaka è forse il continuatore piú diretto, sia per le tematiche affrontate, sia per l'impostazione algebrica. Già nella tesi di dottorato con Zariski, Hironaka si occupa di scoppiamenti elaborandone una teoria generale nella categoria degli schemi; prepara cosí lo strumento per affrontare e risolvere il problema classico dello scioglimento delle singolarità per le varietà algebriche. Gli strumenti e le tecniche di Zariski, validi per le dimensioni 2 e 3, risultano inadeguati al caso generale: ad esempio il passaggio alla normalizzazione, che fa scomparire le curve multiple di una superficie, lascia singolarità anche complicatissime in dimensione alta. Tuttavia Hironaka affronta il problema nello spirito algebrico di Zariski. Ed è cruciale per lui la scelta della categoria nella quale operare la desingolarizzazione. In effetti un attento esame dell'analisi fine degli anelli locali, condotta da Zariski, Chevalley e Nagata, lo porta ad introdurre (insieme a Grothendieck) il concetto di anello locale eccellente, in base al comportamento nel passaggio al completamento. E la categoria naturale per lo scioglimento non è quella degli schemi di tipo finito sopra un corpo (cioè delle varietà algebriche), bensí quella degli schemi di tipo finito sopra un anello locale eccellente, che, oltre alle varietà algebriche, comprende anche le varietà algebroidi. Il risultato principale del lavoro è ottenuto attraverso un esame accurato delle singolarità e del loro comportamento negli scoppiamenti.

Mentre il problema di sciogliere le singolarità è ancora aperto in caratteristica positiva per il caso generale, esso è risolto, proprio con le tecniche di Zariski e di Hironaka, nel caso delle superfici ad opera di Hironaka stesso, Abhyankar e Lipman.

7. *Geometria/topologia e meccanica.*

7.1. Sistemi meccanici.

Spazio delle configurazioni. Nel caso del movimento di un sistema di N punti $P_1, P_2, \ldots, P_N$ aventi masse $m_1, m_2, \ldots, m_N$ l'insieme delle posizioni possibili per il sistema (detto spazio di configurazione o delle configurazioni) è per definizione il prodotto cartesiano di N esemplari di $\mathbf{R}^3$. Qualora fra i punti siano imposti r vincoli olonomi allora, come ha osservato Lagrange, lo spazio delle configurazioni costituisce una varietà differenziabile V di dimensione $n = 3N - r$ coincidente con il numero dei gradi di libertà del sistema, le cui coordinate locali $q^1, \ldots, q^n$ sono dette coordinate lagrangiane.

Nel caso del pendolo piano, ad esempio, $V = S^1$, la coordinata locale è la coordinata angolare; nel caso del pendolo (matematico) sferico $V = S^2$, nel caso del pendolo piano doppio $V = S^1 \times S^1$.

Il moto alla Poinsot è il moto di un solido pesante intorno al suo centro di gravità che si suppone coincidente con l'origine O di $\mathbf{R}^3$ in cui è fissato un sistema di riferimento. Se s'introduce in $\mathbf{R}^3$ anche il sistema di riferimento inerziale (legato al solido) i cui assi sono gli assi principali d'inerzia del solido, la posizione del solido è individuata dalla rotazione $a \in SO(3)$ che trasforma il riferimento inerziale nel riferimento prefissato di $\mathbf{R}^3$. Il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ (le cui coordinate locali sono per esempio gli angoli di Eulero) è una varietà differenziabile diffeomorfa allo spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.

Energia cinetica. Sia TV il fibrato tangente a V, le cui coordinate locali sono $(q^i, \dot{q}^i)$, le $\dot{q}^i$ essendo le cosiddette velocità generalizzate (TV costituisce quindi lo spazio degli stati). L'energia cinetica del sistema meccanico è, in coordinate locali, una forma quadratica $T(q, \dot{q}) = \Sigma g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j/2$ definita positiva che individua quindi una struttura riemanniana sulla varietà V. Nel caso in cui gli N punti siano privi di vincoli, l'energia cinetica è

$$T = \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)/2;$$

nel caso del pendolo semplice è $T = m\dot{q}^2/2$, ove $\dot{q}$ è la velocità angolare; ecc.

Potenziale. Le forze f_i che agiscono sul sistema meccanico formano un sistema potenziale se esiste una funzione (detta energia potenziale o solo potenziale) $U \in \mathfrak{F}(V)$ per la quale le forze, in coordinate locali, si scrivono $f_i = -\partial U/\partial q^i$. Nel caso del pendolo semplice è $U = -\omega^2 \cos q$, nel moto alla Poinsot è $U = 0$, nel caso di un sistema di N punti soggetti all'attrazione gravitazionale è (con una opportuna normalizzazione) $U = \sum_{1 \le k < p \le N} m_k m_p / r_{kp}$, ove $r_{kp} = ((x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2 + (z_k - z_p)^2)^{1/2}$.

Un sistema meccanico è dunque individuato dalla terna (V, g, U), ove V è una varietà differenziabile (spazio delle configurazioni), g è una metrica riemanniana cui è associata l'energia cinetica $T(q, \dot{q})$ e U è il potenziale da cui derivano le forze esterne; $L = T - U$ è la lagrangiana del sistema meccanico (V, g, U), l'energia totale del sistema è $E = T + U$: sono elementi di $\mathfrak{F}(TV)$.

Il principio di minima azione di d'Alembert-Maupertuis dice che un movimento nel sistema meccanico (V, g, U) è una curva $\gamma : [t_0, t_1] \to V$ estremale del funzionale (detto azione) $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma})\, dt$, ove $\dot{\gamma}$ è il vettore velocità del movimento, $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}V$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$.

Le coordinate locali q^i di un punto in un movimento nel sistema meccanico verificano le equazioni di Lagrange

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

L'immagine della curva γ è detta anche traiettoria delle equazioni della dinamica (1). D'abitudine $\partial L/\partial q^i$ è detta forza generalizzata, $\partial L/\partial \dot{q}^i = p_i$ è detto impulso generalizzato, (q^i, p_i) sono le coordinate canoniche e individuano un punto del fibrato cotangente T^*V.

Nel caso del moto di un punto di massa m in $\mathbf{R}^3$ le (1) sono le equazioni di Newton, nel caso di un sistema di N punti materiali soggetti all'attrazione gravitazionale le (1) sono le equazioni del problema degli N corpi:

$$(2) \qquad m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_k} \qquad m_k \frac{d^2y_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_k} \qquad m_k \frac{d^2z_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

(con $k = 1, \ldots, N$); nel caso del pendolo semplice si ottiene

$$(3) \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 \sin q = 0.$$

È importante sottolineare che le curve integrali di (1), e cioè le traiettorie del moto, sono indipendenti dalle coordinate locali.

Sistema hamiltoniano. Il sistema (1) è un sistema differenziale del secondo ordine sulla varietà V; esso può però essere trasformato nel modo seguente in un sistema del primo ordine sulla varietà T^*V, che è lo spazio delle fasi di coordinate (q^i, p_i) del sistema lagrangiano (1). La metrica riemanniana individua infatti un isomorfismo canonico di T_qV su T_q^*V con il quale le (1) sono equivalenti al sistema, scritto in coordinate locali,

$$(4) \qquad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

ove $H(q, p) = (\Sigma g^{ij}(q)p_ip_j)/2 + U(q)$, detta hamiltoniana del sistema, è un elemento di $\mathfrak{F}(T^*V)$; il passaggio da $L(q, \dot{q})$ ad $H(q, p)$ costituisce la cosiddetta trasformazione di Legendre di L considerata come funzione di $\dot{q}$; risulta inoltre $H(q, p) = E(q, \dot{q})$ per $p = \partial L/\partial \dot{q}$. È possibile dare un'interpretazione geometrica intrinseca del sistema (4) osservando che $(\dot{q}^i, \dot{p}_i)$ sono le coordinate locali di una curva integrale del campo vettoriale $X_H = I(dH)$ su T^*V, ove I è l'isomorfismo di $T_X^*(T^*V)$ su $T_X(T^*V)$ che in coordinate locali è rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 1 essendo la matrice-identità in dimensione n. Una volta conosciute le curve integrali di X_H su T^*V è possibile determinare le traiettorie dei movimenti del sistema meccanico (V, g, U) prendendone la proiezione canonica su V.

Su T^*V la 2-forma chiusa ω indotta dalla metrica riemanniana, che in coordinate locali si scrive $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$, viene detta fondamentale ed individua la struttura simplettica di T^*V (cfr. § 5.3). La varietà T^*V è orientabile e il volume di Liouville $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ su T^*V è invariante per ogni campo hamiltoniano. Si può verificare che H è un integrale primo del campo e cioè $X_H(H) = 0$ (è la legge di conservazione dell'energia). Ogni curva integrale di X_H è dunque contenuta su una superficie di livello $H(q, p) = h$; la costante h è detta l'energia totale della curva integrale poiché ivi $H(q, p) = E(q, \dot{q})$. Il gruppo locale associato al campo hamiltoniano conserva la struttura simplettica di T^*V e cioè la 2-forma ω; Poincaré ed Elie Cartan hanno costruito altre

forme differenziali invarianti. Si osservi inoltre che, anche con V compatta, T^*V non è compatta e quindi un campo vettoriale su T^*V non è in generale completo.

L'importanza della struttura simplettica individuata dalla 2-forma ω è dovuta al fatto che i cambiamenti di coordinate nello spazio delle fasi T^*V che conservano tale struttura (detti trasformazioni canoniche) conservano le equazioni di Hamilton (4); tali sono ad esempio le trasformazioni del gruppo locale associato al campo hamiltoniano.

Flusso geodetico. Nel caso in cui $U=0$ e X_H è completo (ad esempio quando V è compatta) il flusso generato da X_H è detto flusso geodetico su T^*V; le corrispondenti equazioni di Lagrange definiscono le geodetiche della varietà V: un punto materiale costretto a restare su una varietà riemanniana V si muove lungo una geodetica. È questo il caso del moto alla Poinsot che genera un flusso geodetico su $T^*SO(3)$ munito di un'opportuna metrica riemanniana.

Nel caso in cui $U\neq 0$ le traiettorie dell'equazione della dinamica sono ancora geodetiche di una metrica riemanniana; precisamente per un certo $h\in\mathbf{R}$ si consideri su V l'insieme dei q tali che $U(q)<h$ e ivi la metrica riemanniana ρ di matrice $\rho_{ij}=(h-U(q))g_{ij}$. Allora le traiettorie del sistema meccanico (V, g, U) aventi energia totale h sono geodetiche rispetto alla metrica ρ. In particolare se $h>\sup_{q\in V} U(q)$, allora la metrica si deduce da g con una omotetia di rapporto $k>0$ dipendente dal punto q ma non dalla direzione: gli angoli coincidono dunque nelle due metriche. Ad esempio, nel caso del pendolo piano doppio, in cui $V=S^1\times S^1$, per ogni n ed m interi vi è una geodetica chiusa che avvolge il toro m volte secondo un parallelo e n volte secondo un meridiano: ciò significa che per un valore abbastanza grande della costante di energia h vi è un movimento periodico nel quale una massa effettua m rivoluzioni mentre l'altra ne effettua n nello stesso intervallo di tempo. Si tratta di una delle possibili applicazioni allo studio dei sistemi meccanici dei teoremi topologici relativi alle geodetiche sulle varietà riemanniane.

7.2. Sistemi dinamici.

Con le notazioni del § 5.2 un sistema dinamico su una varietà M è un sistema di equazioni differenziali ordinarie definite attraverso un campo vettoriale completo X. Al sistema dinamico è dunque associato il flusso φ_t; reciprocamente, a ciascun flusso φ_t su M è possibile associare un campo vettoriale tangente a M definendo per ogni $x\in M$ il vettore $X(x)\in T_xM$ come $(d\varphi_t(x)/dt)_{t=0}=X(x)$. Risulta cosí $\varphi_t(x)$ soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $d\varphi_t(x)/dt=X(\varphi_t(x))$, con $\varphi_0(x)=x$. Si può dunque parlare indifferentemente di sistema dinamico, di campo vettoriale completo o di flusso su M. (I flussi hamiltoniani su T^*V considerati nel § 7.1 sono particolari sistemi dinamici su una varietà non compatta).

«La teoria qualitativa o geometrica delle equazioni differenziali ordinarie – come opposta o meglio complementare della teoria quantitativa, numerica o analitica – fu considerata per la prima volta nel 1881 da Poincaré nella sua famosa memoria *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Questo articolo era talmente avanzato rispetto al suo tempo, nell'obiettivo e nelle prospettive, che dovettero trascorrere due o tre decenni prima che venisse assimilato e fosse possibile progredire nella via indicata. Ancora oggi la lettura di tale memoria può essere remunerativa per il ricercatore matematico poiché qua e là egli può trovare in un angolo oscuro – e ve ne sono parecchi in quel vasto edificio – un problema interessante o un'idea da sviluppare ulteriormente» [Peixoto 1967, p. 469].

Orbite di un flusso. Vi sono tre possibili tipi di orbite (o traiettorie):

1) i punti fissi o di equilibrio del flusso e cioè i punti $x\in M$ tali che $\varphi_t(x)=x$ per ogni $t\in\mathbf{R}$; essi possono essere caratterizzati come gli zeri del campo vettoriale associato a φ_t;
2) le orbite periodiche tali che $\varphi_t(x)=x$ per un $t\neq 0$; siccome usualmente si escludono i punti fissi vi è un minimo periodo $t_0>0$ tale che $\varphi_{t_0}(x)=x$;
3) le orbite ordinarie per le quali l'applicazione $t\to\varphi_t(x)$ di $\mathbf{R}$ in M è iniettiva; per tali orbite è significativo il comportamento per $t\to\pm\infty$, in particolare ha interesse determinare se vi è convergenza verso un punto fisso oppure verso un'orbita periodica.

L'insieme di tutte le orbite viene detto quadro delle fasi del sistema dinamico.

Nell'ambito dello studio del comportamento asintotico di un sistema dinamico, un punto $p\in M$ è detto non dimenticante per il flusso φ_t se per ogni intorno U di p in M e per ogni $t_0>0$ esiste t con $|t|>t_0$ tale che $\varphi_t(U)\cap U\neq\emptyset$; l'insieme di tali punti, indicato con $\Omega=\Omega(\varphi_t)$, forma un sottoinsieme chiuso di M invariante per il flusso (e cioè $\varphi_t(\Omega)\subset\Omega$ per ogni t) ed ovviamente contenente i punti fissi e le orbite periodiche.

Un punto $y\in M$ è detto punto ω-limite (risp. α-limite) di un punto $x\in M$ se esiste una successione $t_n\to+\infty$ (risp. $-\infty$) tale che $\lim_{n\to\infty}\varphi_{t_n}(x)=y$; l'insieme di tali punti è indicato con $L_\omega(x)$ (risp. $L_\alpha(x)$) e viene detto insieme ω-limite (risp. α-limite) di x; tali insiemi sono naturalmente contenuti in Ω.

Equivalenza topologica. Due sistemi dinamici φ_t e ψ_t sono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo h di M in sé che trasforma le orbite di φ_t in orbite di ψ_t orientate positivamente; si scrive allora $\varphi_t\sim\psi_t$ ovvero $X\sim Y$ per i corrispondenti campi vettoriali. Se x è un punto fisso di φ_t, e cioè $X(x)=0$, allora $h(x)$ è un punto fisso di ψ_t, e cioè $Y(h(x))=0$; in modo analogo se γ è un'orbita periodica uscente da x di minimo periodo T allora $h(\gamma)$ è un'orbita periodica per ψ_t uscente da $h(x)$ di minimo periodo T' in generale diverso da T. Se ne deduce che i punti fissi e le orbite periodiche sono invarianti per l'equivalenza topologica.

Usando tale relazione di equivalenza Kneser ha classificato (1924) i campi vettoriali che non si annullano sul toro, e cioè ha esibito le corrispondenti classi di equivalenza.

Il dogma della stabilità. Se $M = T^*V$ e X è un campo di vettori hamiltoniano che rappresenta l'evoluzione di un sistema fisico, allora piccole perturbazioni di X devono condurre a un sistema con lo stesso aspetto qualitativo: questo dogma della stabilità è almeno in parte contenuto nella nozione di problema ben posto secondo Hadamard; peraltro Thom, in *Stabilité structurelle et morphogenèse* (1967), ha suggerito che «la stabilità, formulata in modo preciso in una specifica teoria, venga aggiunta al modello come ipotesi addizionale. Tale formalizzazione, anche se rischia di condurre a un sistema assiomatico inconsistente, riduce il criterio di stabilità a un aspetto del criterio di adeguatezza, e può inoltre permettere ulteriori teoremi o predizioni nel modello. Fino ad ora nessuna implicazione di questo assioma è nota per la meccanica celeste, ma Thom ha descritto alcune conseguenze nel suo modello per i sistemi biologici» [Abraham 1967, p. 4].

Si indicherà con $\mathfrak{X}$ l'insieme di tutti i campi vettoriali su M munito di un'opportuna topologia di Whitney; seguendo Andronov e Pontrjagin (1937) si dice che X è *strutturalmente stabile* se $X \sim Y$ per ogni Y in un intorno di X rispetto alla topologia di $\mathfrak{X}$. Si deve a Smale la chiara determinazione (1960) del problema fondamentale della teoria qualitativa dei sistemi dinamici su M: «Esibire in $\mathfrak{X}$ un insieme denso tale che i comportamenti dei corrispondenti sistemi siano abbastanza semplici da renderli classificabili. È allora naturale suddividere il problema fondamentale in due parti: il problema di approssimazione e quello di classificazione. A tale proposito vi sono due punti da precisare. Innanzitutto non si deve cercare di classificare tutti i sistemi di $\mathfrak{X}$ poiché ciò è troppo difficile. È facile convincersene considerando i campi vettoriali su S^1: classificarli significa classificare i sottoinsiemi chiusi di S^1. In secondo luogo non si deve a tutti i costi cercare una classificazione rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ di omeomorfismi che trasformano traiettorie in traiettorie. Se si cerca di classificare una famiglia densa, ci si può decidere per qualcosa di piú debole di $\sim$. L'idea nella formulazione di Smale è allora quella di combinare i requisiti di "genericità", intesa nel senso preciso di densità in $\mathfrak{X}$, e di "semplicità" intesa in un senso un po' vago di comportamento cosí semplice da permettere una classificazione» [Peixoto 1967, p. 472]. Una relazione di equivalenza proposta da Smale e che si è rivelata assai utile è: φ_t e ψ_t sono topologicamente equivalenti su Ω se esiste un omeomorfismo $h: \Omega(\varphi_t) \to \Omega(\psi_t)$ che conserva le orbite.

Nel caso in cui M sia una varietà compatta di dimensione 2, Peixoto ha provato (1962) che i sistemi strutturalmente stabili sono caratterizzati dalle seguenti proprietà: *a*) Ω è formato solo da un numero finito di punti fissi e di orbite periodiche; *b*) nessuna traiettoria congiunge due punti di sella.

Peixoto ha inoltre provato che l'insieme dei sistemi strutturalmente stabili è aperto e denso in $\mathfrak{X}$. Il grande merito di Smale è stato di avere immediatamente realizzato che l'aspetto significativo di tale risultato non è tanto la stabilità strutturale, quanto la «genericità» oltre alla «semplicità» della classificazione che ne consegue; in effetti egli ha dimostrato nel 1966 che esiste una varietà di dimensione 4 sulla quale i sistemi strutturalmente stabili non sono densi e peraltro egli ha provato che per varietà di dimensione arbitraria sono Ω-stabili (e cioè piccole perturbazioni dànno luogo a flussi topologicamente equivalenti su Ω) i flussi che verificano proprietà analoghe alla *a*) e alla *b*) espresse in termini di trasversalità.

7.3. La stabilità del sistema solare.

L'osservazione qualitativa del moto degli astri e in particolare del Sole e della Luna è stata sempre al centro dell'interesse dell'umanità, fin dall'epoca preistorica. L'interpretazione di tali fenomeni ha grandemente influenzato lo sviluppo della matematica e in particolare della geometria; i dati astronomici raccolti dai Caldei, dai Babilonesi e dagli Egiziani vennero nell'antichità elaborati in modelli matematici qualitativi, il piú famoso dei quali è senza alcun dubbio il modello tolemaico [una moderna ed affascinante esposizione di tali problematiche si trova in Neugebauer 1975].

Keplero, Galileo e Newton, realizzando una rivoluzione scientifica che ha assunto un ruolo paradigmatico nella storia del pensiero, proposero un nuovo modello qualitativo del sistema solare ancora universalmente accettato, anche se lo studio matematico rigoroso di esso è ben lungi dall'essere completato. Se si indicano infatti con m_i $(1 \leq i \leq N-1)$ le masse dei pianeti e con m_N la massa del Sole, le traiettorie dei pianeti e del Sole verificano il sistema di equazioni differenziali ordinarie degli N corpi (2). Una semplice ispezione delle formule mostra come tali equazioni siano definite solo per $r_{kp} \neq 0$ e se r_{kp} si avvicina a zero si parla di *collisione*, mentre se r_{kp} diventa infinito si parla di *fuga*. Il problema principale è lo studio del comportamento delle soluzioni per un intervallo di tempo infinito: esistono soluzioni che non presentano collisioni o fughe? esistono soluzioni per le quali $\max_{1 \leq k < p \leq N} (r_{kp}, r_{kp}^{-1})$ è limitato per ogni t? Una risposta a tali problemi può essere ottenuta costruendo soluzioni periodiche, ma tali soluzioni sono eccezionali oppure formano un insieme aperto o almeno di misura positiva nello spazio delle fasi? Le prime ricerche in questo campo sono state motivate da esigenze astronomiche (calcolo delle orbite dei pianeti e previsione delle effemeridi) ma, siccome il moto dei pianeti e dei satelliti ha perturbazioni di carattere secolare, è sorto il problema della stabilità del sistema planetario. Laplace e Lagrange dimostrano ad esempio l'invariabilità degli assi maggiori delle ellissi percorse dai pianeti; usando la tecnica degli sviluppi in serie rispetto ai parametri perturbativi, Laplace conclude che «il sistema del mondo non fa che oscillare attorno ad uno stato medio dal quale non si allontana che per una piccolissima quantità. Esso, per merito della sua costituzione e per merito della legge della gravitazione, gode di una stabilità che può essere distrutta soltanto da cause estranee e noi siamo certi che la loro azione è in-

sensibile a partire dalle osservazioni piú antiche sino ai nostri giorni» [1786-88, ed. 1895 pp. 248-49].

La tecnica degli sviluppi in serie venne ripresa da Lagrange, da Poisson e in particolare da Dirichlet, senza però che si pervenisse a risultati conclusivi, tanto che su suggerimento di Weierstrass e Mittag-Leffler, il re Oscar II di Svezia proponeva un premio per la soluzione del problema di determinare uno sviluppo in serie per le coordinate degli N corpi valido per ogni t. Nel 1889 tale premio fu attribuito a Henri Poincaré, anche se egli non aveva fornito una soluzione completa del problema. I suoi risultati, però, «e la scoperta di Bruns (1877) che nessun metodo quantitativo oltre agli sviluppi in serie poteva risolvere il problema degli N corpi, segnarono la fine del periodo quantitativo. Per la meccanica celeste tale situazione rappresentava un grave dilemma, comparabile alla crisi associata alla relatività e alla meccanica quantistica in altri rami della matematica. La soluzione è dovuta al genio di Poincaré che risuscitò il punto di vista qualitativo, unito a metodi matematici assolutamente originali. Le invenzioni di Poincaré, culminate nella topologia e nella geometria differenziale moderna, costituiscono un esempio recente e meno noto di sviluppo concomitante di matematica e meccanica, comparabile con l'analisi, le equazioni differenziali e la teoria variazionale» [Abraham 1967, p. 1]. Va sottolineato tuttavia che i recenti risultati di Kolmogorov, Arnol'd e Moser hanno invece provato che per «la maggior parte» dei movimenti (almeno nel caso del problema ristretto dei tre corpi) gli sviluppi in serie convergono e rappresentano soluzioni «affidabili» [cfr. ad esempio Moser 1973 e Arnol'd 1974]. In questo senso si può dire che l'affermazione di Laplace è sostanzialmente corretta.

8. *Conclusione.*

Il problema testé considerato della stabilità del sistema solare è significativo anche perché, pur avendo un'evidenza intuitiva, ha dato origine a un macchinario astratto e complesso con il quale l'affermazione fideistica di Laplace viene giustificata, ma con una dimostrazione rigorosa che è comprensibile solo agli specialisti.

L'opposizione intuizione/rigore che attraversa tutta la ricerca scientifica è sempre stata presente in tutto lo sviluppo della geometria. Se infatti alcuni grandi matematici hanno potuto, e in parte possono ancora, intuire risultati fondamentali che aprono strade significative per tutti i ricercatori, è ben vero che tale intuizione è riservata a poche persone e quindi difficilmente permette una larga diffusione della ricerca scientifica. La dimostrazione rigorosa di un teorema (che ne è parte integrante) non solo è essenziale per la diffusione della conoscenza scientifica, in quanto fornisce a tutti la possibilità di capire il risultato di cui si tratta, ma spesso permette di determinare quale è la portata effettiva del risultato ottenuto e del metodo usato per ottenerlo. In questo senso sono indubbiamente emblematici i teoremi di Gauss-Bonnet (cfr. § 5.5) e di Riemann-Roch (cfr. §§ 3.3, 6.3 e 6.4), i cui diversi approfondimenti, culminati con il teorema dell'indice di Atiyah-Singer, hanno evidenziato legami precedentemente insospettati fra la geometria, l'analisi e l'algebra.

Senza alcun dubbio una ragione del fascino della matematica è nel fatto che da almeno un secolo i due aspetti del rigore e dell'intuizione convivono in modo proficuo. «In particolare, in geometria, la tendenza astratta ha dato origine ai grandiosi edifici sistematici della geometria algebrica, della geometria riemanniana e della topologia, nei quali si applicano su vasta scala i metodi del ragionamento astratto, del simbolismo e del calcolo. Tuttavia si ascrive anche oggigiorno una grande importanza al concetto geometrico *intuitivo*, non solo per il suo alto valore euristico, ma anche perché esso ci permette di comprendere e apprezzare meglio i risultati della ricerca scientifica» [Hilbert e Cohn-Vossen 1932, trad. it. p. VII].

Le pagine che precedono non possono avere che la speranza di descrivere alcune parti della geometria, ben sapendo peraltro, come dice un verso del *Tao Te Ching*, che «i pezzi del carro non son carro» e che gli argomenti trattati possono non essere considerati dal lettore i soli degni d'interesse in tale vasto edificio. Va tuttavia ricordato che «come per tutte le pubblicazioni su un argomento scientifico complesso, esiste un solo lettore ideale: l'autore. Gli argomenti sono scelti, i punti di vista sono esaminati, le risposte sono formulate in funzione dell'effetto che hanno sui suoi gusti e pregiudizi» [Neugebauer 1975, p. VII]. Essendo tre gli autori, con pareri spesso discordi, v'è dunque poca speranza che esista tale lettore ideale. [G. G., A. S. e P. V.].

Abraham, R.
1967 *Foundations of Mechanics*, Benjamin, Reading Mass.

Arnol'd, V.
1974 *Matematičeskie metodi klassičeskoi mehaniki*, Nauka, Moskva.

Atiyah, M. F.
1967 *Algebraic topology and elliptic operators*, in «Communications on pure and applied mathematics», XX, pp. 237-49.

Bourbaki, N.
1960 *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris (trad. it. Feltrinelli, Milano 1963).

Cayley, A.
1859 *A sixth memoir upon quantics*, in «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», CXLIX, pp. 61-90; ora in *Collected Mathematical Papers*, II, Cambridge University Press, Cambridge 1889, pp. 561-92.

Dieudonné, J.
1974 *Cours de géométrie algébrique*, voll. I e II, Presses Universitaires de France, Paris.
1977 *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris.

Grothendieck, A., e Dieudonné, J.
1960 *Eléments de géométrie algébrique*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris; ed. Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1971².

Hausdorff, F.
1914 *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig.

Hilbert, D.
1899 *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig (trad. it. Feltrinelli, Milano 1970).

Hilbert, D., e Cohn-Vossen, S.
1932 *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin (trad. it. Boringhieri, Torino 1960).

Klein, F.
1872 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*, Deichert, Erlangen (trad. it. in «Annali di Matematica», serie II, XVII (1889), pp. 307-49).

Kobayashi, S.
1972 *Transformations Groups in Differential Geometry*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York.

Laplace, P.-S. de
1786-88 *Sur l'équation séculaire de la lune*, in «Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris»; ora in *Œuvres complètes*, vol. XI, Gauthier-Villars, Paris 1895, pp. 243-71.

Moser, J.
1973 *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton N.J.

Mumford, D.
1971 Prefazione a O. Zariski, *Algebraic Surfaces*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1971².

Neugebauer, O.
1975 *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York.

Pascal, B.
[1656] *De l'esprit géométrique et De l'art de persuader*, II. *De l'art de persuader*, s. e., Paris 1728; ora in *Œuvres complètes*, Seuil, Paris 1963, pp. 355-59.

Peixoto, M. M.
1967 *Qualitative Theory of Differential Equations and Structural Stability*, in J. K. Hale e J. P. La Salle (a cura di), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, New York - San Francisco - London, pp. 469-80.

Poincaré, H.
1895 *Analysis Situs*, in «Journal de l'Ecole Polytechnique», serie II, I, pp. 1-121.

Poncelet, J.-V.
1822 *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris; ed. Gauthier-Villars, Paris 1865².

Riemann, B.
1857 *Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien*, in «Journal für reine und angewandte Mathematik», XLIV, pp. 105-10.

Segre, C.
1889 Nota alla trad. it. di Klein 1872.

Severi, F.
1958 *Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà. Questioni collegate*, Springer, Berlin.

Weil, A.
1949 *Number of solutions of equations in finite fields*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», LV, pp. 497-508.

Weyl, H.
1938 Recensione a E. Cartan, *La Théorie des Groupes finis et continus et la Géométrie Différentielle traitées par la Méthode du Repère Mobile*, Gauthier-Villars, Paris 1937, in «Bulletin of the American Mathematical Society», XLIV, pp. 598-601.

Zariski, O., e Samuel, P.
1958 *Commutative Algebra*, Van Nostrand, Princeton N.J.

All'origine della geometria stanno sia motivazioni pratiche (misura dei terreni, navigazione, architettura e urbanistica, ecc.; cfr. **disegno/progetto, tecnica**) sia speculative (come quelle connesse alle varie trasformazioni dell'idea di **numero**). Le applicazioni all'**astronomia** e alla meccanica hanno favorito lo stesso sviluppo del **calcolo** e la nascita della moderna **fisica** matematica; lo studio delle traiettorie dei punti materiali in **moto** e il problema della rappresentazione cartografica della superficie terrestre (cfr. **atlante, terra**), che possono venir affrontati in modo adeguato solo con lo sviluppo del calcolo **infinitesimale**, hanno costituito la motivazione prima della cosiddetta geometria **differenziale**: sono infatti le proprietà locali (cfr. **locale/globale**) delle **curve e superfici** che costituiscono l'oggetto principale di tale indirizzo di ricerca. Da parte sua la geometria algebrica (cfr. **razionale/algebrico/trascendente** e anche **divisibilità**) costituisce oggi l'ambito naturale di molti problemi di classificazione degli enti geometrici secondo opportuni invarianti (cfr. **invariante**). Il raffinarsi di tradizionali opposizioni (quali **continuo/discreto, qualità/quantità**) ha avuto infine come esito il costituirsi della topologia come settore di ricerca relativamente autonomo.

Ora modello di rigore formale (cfr. **assioma/postulato, logica**), ora ricca di suggerimenti euristici con la sua vasta gamma di procedimenti analitici e sintetici (cfr. **analisi/sintesi**), la geometria ha dato origine, con una progressiva astrazione (cfr. **astratto/concreto**), a grandiosi edifici sistematici, ove la **ricerca** procede in modo altamente specialistico (per alcuni specifici settori il lettore è rimandato ad altri articoli della presente *Enciclopedia*, per esempio a **combinatoria** e **grafo** per le cosiddette geometrie finite, ecc.). Ciò non ha affatto diminuito le possibilità applicative: ad esempio geometria differenziale e topologia sono oggi strumenti essenziali per l'ideazione di modelli (cfr. **modello**) nello studio dei sistemi dinamici (si pensi alle questioni di **stabilità/instabilità** e alla teoria delle **catastrofi**), mentre è indiscutibile il ruolo della geometria nelle teorie fisiche (per gli aspetti epistemologici connessi cfr. **teoria/modello, paradigma** e anche **convenzione**) che piú hanno contribuito a mutare le nostre concezioni della **natura** (cfr. in particolare **cosmologie, relatività, spazio/tempo, sistemi di riferimento** e per altri aspetti **simmetria**).

Al di là delle differenti motivazioni e applicazioni sussiste infine nella geometria un'unità profonda; piú che un'unica teoria o un unico metodo, essa rappresenta oggi un punto di vista unitario per le **matematiche** (cfr. per esempio **dualità**), che fornisce spunti per una revisione dei fondamenti (cfr. **trasformazioni naturali / categorie**) e un continuo banco di prova per le varie filosofie della matematica (cfr. **filosofia/filosofie**).

'sione) che
'va. L'in-
conte-
'one
al

Invariante

La parola 'invariante' descrive un processo comune a tutte le scienze matematiche e piú in generale fisiche e naturali. In questa nozione è racchiusa a priori l'idea di matematizzare la realtà, ovvero di trasformare problemi qualitativi in problemi quantitativi e quindi costruire formalismi astratti e il calcolo su di essi.

Ogni dottrina matematica è suscettibile di una lettura in chiave «invariantiva», ma per non forzare il senso della tesi e per essere piú precisi ci si limiterà all'aspetto matematico che piú di altri illustra le idee formulate ovvero ai metodi algebrici e geometrici. Anche in questo la selezione degli argomenti presi ad esemplificazione non sarà certo completa ma piuttosto ispirata ai temi che, anche sotto il profilo tecnico, sono stati di volta in volta classificati come «teoria degli invarianti».

Tali temi si possono «grosso modo» classificare per periodi storici come: invarianti delle equazioni algebriche in una variabile (Lagrange, Galois, 1700 - inizio 1900); la teoria degli invarianti proiettivi del XIX secolo ed i suoi sviluppi (programma di Klein, teoria di Hilbert, ecc.); invarianti di strutture topologiche, differenziali, analitiche, ecc. (XX secolo).

Anche limitandosi a questi argomenti le diramazioni possibili sono numerosissime e abbracciano vasti campi della fisica (per quanto riguarda le teorie relativistiche, la meccanica quantistica, la meccanica dei continui), della chimica (per quanto riguarda la teoria dei cristalli, le simmetrie molecolari), ecc. Su questi aspetti non sarà però possibile dare alcun cenno.

1. *Equazioni algebriche, funzioni simmetriche, teoria di Galois.*

Si inizia la discussione degli aspetti algebrici della teoria degli invarianti con lo studio di una equazione algebrica:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Il numero n viene chiamato il grado dell'equazione e gli elementi a_i i suoi coefficienti. I coefficienti sono dei numeri; di quali numeri si tratti dipende dal livello di generalità in cui si cerca di studiare l'equazione. Storicamente essi sono stati considerati numeri naturali, razionali, reali, complessi o elementi di un campo astratto a seconda del grado di sviluppo raggiunto dalla nozione stessa di numero e dalle regole di calcolo sviluppate.

Equazioni particolari di primo e secondo grado sono state trattate fin dai tempi dell'antichità, in relazione a svariati problemi di geometria elementare. La formula risolutiva per l'equazione di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$, cioè

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

era nota ai matematici di tutte le culture antiche anche se essi, non possedendo il simbolismo a noi ormai usuale, la esprimevano in modo piú o meno complicato. La soluzione piú antica (circa 4000 anni fa) sembra essere dovuta ai matematici babilonesi.

Il numero $\Delta = b^2 - 4c$, detto discriminante dell'equazione, svolge un ruolo assai importante. Se $\Delta > 0$ l'equazione possiede due radici reali distinte. Se $\Delta = 0$ le due radici sono coincidenti. Infine, secondo i matematici fino al XVII, XVIII secolo, non ci sono radici se $\Delta < 0$; essi ricercavano infatti le soluzioni nel campo dei numeri reali. In effetti per quasi tutti i matematici antichi le radici dovevano ricercarsi solo fra i numeri positivi, e i numeri negativi entrarono nell'uso comune della matematica solo con gli Arabi e nel Rinascimento. Le radici appaiono però, e distinte, non appena si introduca il campo **C** dei numeri complessi, ovvero numeri dati formalmente da espressioni del tipo $a+ib$, $a, b \in \mathbf{R}$ (i reali), sui quali si opera con la regola di calcolo $i^2 = -1$.

L'introduzione di tali numeri è dovuta a Bombelli (XVI secolo) che iniziò per essi anche lo sviluppo del calcolo algebrico. Il valore dell'opera di Bombelli non fu di fatto completamente riconosciuto dai suoi contemporanei i quali, legati all'interpretazione geometrica euclidea delle equazioni algebriche, negavano la validità di tale calcolo.

La scoperta delle formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado è uno dei grandi successi dell'algebra italiana del Rinascimento. È facile trasformare, tramite un cambiamento lineare della variabile, una equazione di terzo grado in una nuova della forma $x^3 + ax + b = 0$. Per quest'ultima equazione le radici sono espresse da

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Tale formula, contenuta nel fondamentale lavoro di Cardano *Ars Magna*, è dovuta a Scipione del Ferro. Un'importante caratteristica di questa formula, come fu osservato dallo stesso Cardano, è che può essere $(b^2/4) + (a^3/27) < 0$ eppure esistere una soluzione reale. Un esempio, analizzato a fondo da Bombelli, è fornito dalla equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$ di cui 4 è radice. La ragione di questa difficoltà si può chiarire solo con l'introduzione dei numeri complessi; come nell'algebra dei numeri interi si devono manipolare espressioni contenenti numeri negativi anche se il risultato finale è un numero naturale, ugualmente nell'algebra delle equazioni è necessario introdurre i numeri complessi anche se si ricercano solo soluzioni reali. Per l'equazione precedente si ha

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} = 2 + i + 2 - i = 4.$$

La soluzione della equazione di quarto grado, contenuta anch'essa nell'*Ars Magna*, è dovuta a Luigi Ferrari e consiste nel ridurre l'equazione di quarto grado ad un'equazione cubica. La formula finale coinvolge l'estrazione successiva di radicali quadratici e cubici.

La scoperta di queste formule spinse molte generazioni di matematici a

cercare la soluzione generale dell'equazione di grado n per estrazione di radicali. Il risultato finale di tali ricerche, dovuto parzialmente a Paolo Ruffini ed in forma completa ad Abel, è l'impossibilità di risolvere tale equazione per radicali, per $n \geq 5$. Prima di arrivare a discutere questo punto è opportuno mettere in evidenza il contributo di Lagrange, che porterà all'interno delle idee moderne dell'algebra e della nozione di invariante.

Si ricorda che il polinomio $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ammette n radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (eventualmente non tutte distinte) nel campo dei numeri complessi, e pertanto si scrive nella forma $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$.

Tale teorema, noto come teorema fondamentale dell'algebra, è dovuto in forma definitiva a Gauss anche se alcune dimostrazioni parziali furono fornite da vari matematici, fra cui Eulero e d'Alembert. Dalla fattorizzazione data di $f(x)$ si deduce che i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si esprimono tramite le radici nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \\
a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\
&\vdots \\
a_i &= (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leq n} \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_i} \\
&\vdots \\
a_n &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.
\end{aligned}$$

Le n espressioni scritte sono simmetriche nel senso che non variano (formalmente) permutando le radici fra loro. Esse vengono chiamate funzioni simmetriche elementari.

Il teorema fondamentale di Lagrange asserisce che ogni espressione polinomiale simmetrica delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ può essere espressa formalmente come polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Il metodo di Lagrange è effettivo e permette quindi di calcolare il valore di una espressione simmetrica nelle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a partire dai coefficienti dell'equazione (senza cioè dover risolvere l'equazione stessa). Tale principio fornisce un algoritmo per rispondere a numerose questioni relative alla natura delle radici di una o piú equazioni date.

Per esempio si supponga di voler determinare se due polinomi $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ e $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ hanno una radice in comune. Dette $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e rispettivamente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ le radici, non note, di $f(x)$ e $g(x)$, si formi l'espressione

$$R(\alpha_i, \beta_j) = \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j).$$

Essa è simmetrica nelle α_i e nelle β_j separatamente e pertanto si può esplicitare, secondo il metodo di Lagrange, come un polinomio negli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Tale polinomio, detto risultante delle due equazioni, svanisce se e solo se una delle α_i coincide con una delle β_j.

Un altro contributo importante di Lagrange è l'aver riconosciuto che un polinomio $f(x)$ di grado n è univocamente determinato dai valori $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ che esso prende in $n+1$ punti distinti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$. Infatti sussiste la formula (detta di interpolazione)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i \frac{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}.$$

Si descrivono ora i contributi di Galois alla teoria delle equazioni. Sia data un'equazione $f(x)=0$ con radici $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ e sia K un campo di numeri contenente i coefficienti (campo di numeri significa un insieme di numeri chiuso rispetto alle quattro operazioni). Si consideri l'insieme I dei polinomi in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a coefficienti in K che calcolati per $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, \ldots, x_n=\alpha_n$ diano come risultato zero. In generale permutando le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in un polinomio di I è possibile che il polinomio trasformato non sia piú in I, cioè non svanisca sulle radici di $f(x)$. Le permutazioni che trasformano espressioni nulle in espressioni nulle formano un insieme particolare G di permutazioni che gode della proprietà evidente di essere chiuso rispetto alla composizione. Nel linguaggio attuale G è un gruppo di permutazioni, detto gruppo di Galois su K dell'equazione $f(x)=0$; esso è un invariante aritmetico fondamentale della equazione $f(x)=0$. Esiste un metodo effettivo per la determinazione di G, che per brevità viene omesso.

Sia E l'insieme dei numeri ottenuti operando sugli elementi di K e sulle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ con le quattro operazioni. E è un campo di numeri. Se $a=h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in E$ (in cui h è un'espressione razionale) e $\sigma\in G$, il numero $a^\sigma=h(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})$ dipende solo da σ e non dall'espressione h scelta a rappresentare a. Dato un gruppo di permutazioni H contenuto in G (un sottogruppo di G, per definizione) sia $E^H=\{a\in E \mid a^\sigma=a, \text{ per ogni } \sigma\in H\}$ l'insieme degli elementi di E invarianti per H; E^H è un campo contenente K e contenuto in E.

Il teorema di Galois afferma che in questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i sottogruppi del gruppo di Galois G ed i campi compresi fra K ed E.

Il teorema di Galois permette di trovare un criterio per la risolubilità per radicali di una equazione di grado n. Il criterio di Abel-Ruffini afferma che $f(x)=0$ è risolubile per radicali se e solo se il gruppo di Galois G dell'equazione è «risolubile». Per definizione un gruppo G si dice risolubile se esiste una catena di sottogruppi $G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_m=\{1\}$ con la proprietà seguente: esiste un'applicazione φ (omomorfismo) di G_i in un gruppo G'_i tale che:

1) $\varphi(ab)=\varphi(a)\,\varphi(b)$;
2) G'_i è commutativo (cioè $a'b'=b'a'$, per $a', b'\in G'_i$);
3) $\varphi(a)=1$ se e solo se $a\in G_{i+1}$.

L'impossibilità in generale di risolvere l'equazione di quinto grado per radicali segue da questo criterio in quanto si può esibire una equazione di quinto grado la quale ammette come gruppo di Galois il gruppo S_5 di tutte le permutazioni su cinque elementi e tale gruppo *non* è risolubile. Un esempio concreto è l'equazione $x^5-16x+2=0$.

Esiste una vasta letteratura sui gruppi risolubili; un teorema recente di Feit e Thompson [1963], la cui dimostrazione è molto difficile (nella versione originaria occupa 250 pagine del «Pacific Journal of Mathematics»), è il seguente:

TEOREMA (Feit e Thompson). *Ogni gruppo G con un numero dispari di elementi è risolubile.*

Un altro teorema, che rappresenta in modo diverso uno dei punti culminanti della teoria delle equazioni algebriche in una variabile è il teorema di Sturm. Esso fornisce un criterio effettivo per determinare il numero di radici reali di una equazione $f(x)=0$ contenute in un intervallo (a, b) preassegnato (a, b non radici di $f(x)$). Sturm costruisce in modo esplicito n polinomi $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_n(x)$ con un procedimento ricorrente simile al metodo delle divisioni successive di Euclide (III secolo a. C.), a partire da $f(x)$ e dalla sua derivata. Indicato poi con s il numero dei cambiamenti di segno nella successione di numeri $g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a)$, e con t il numero dei cambiamenti di segno nella successione $g_1(b), g_2(b), \ldots, g_n(b)$, risulta che il numero delle radici di $f(x)$ nell'intervallo (a, b) è $s-t$.

Un ultimo punto molto importante nella teoria delle equazioni algebriche è il seguente: dato un numero complesso α è possibile trovare un polinomio $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ a coefficienti a_i razionali tale che $f(\alpha)=0$? In caso positivo α si dirà algebrico e fra tutti i polinomi di cui α è radice ve ne è uno, univocamente determinato, di grado minimo. Tale grado è un invariante numerico di α che ha una notevole importanza. Gauss, rappresentando graficamente i numeri complessi sul piano, osservò che il punto associato ad un numero α può apparire in una costruzione con riga e compasso solo se il grado del polinomio minimo di α è potenza di 2 (ma la condizione non è sufficiente). In particolare poté dare risposta ad alcuni quesiti della matematica greca: non si può per esempio costruire con riga e compasso il poligono regolare con 7 o con 9 lati, ma è possibile costruire quello con 17 lati.

Quasi ottant'anni dopo Hermite e Lindemann dimostrarono che i numeri e, π non sono algebrici, in particolare non esiste una soluzione con riga e compasso al problema della quadratura del cerchio.

2. *L'algebra lineare, il determinante, la dimensione.*

Nella teoria algebrica delle equazioni si cerca di studiare le soluzioni di un «sistema» di equazioni in molte indeterminate (ad esempio un sistema di due equazioni in due incognite: $x^2+y^2-2x+3y-1=0$; $x^3+x^2y-2y^2+y=0$). Un tale sistema esprime generalmente la traduzione algebrica di un problema geometrico, seguendo le idee di coordinatizzazione della geometria (Descartes).

Nel paragrafo precedente si è accennato allo studio di una equazione in una variabile. In questo paragrafo si accennerà alla teoria dei sistemi di equazioni lineari, cioè di primo grado in tutte le variabili.

Secondo una notazione ormai standard in matematica (che risale a Leibniz) un tale sistema si può scrivere:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(1) viene chiamato un sistema di m equazioni in n variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; si suppone qui che i numeri a_{ij}, b_h siano noti e si voglia ricavare da essi l'espressione degli x_j.

In base a un principio, che può essere reso matematicamente preciso, un tale sistema «in generale» non avrà alcuna soluzione se $m>n$, avrà una soluzione unica se $m=n$ e ne avrà infinite se $m<n$. Si esplicita il significato dell'espressione 'in generale' in tre tappe:

1) $n=m$, la regola di Cramer. Il calcolo pratico delle soluzioni di un sistema, che si può effettuare per successiva eliminazione delle variabili, portò Cramer a formulare una regola generale che va sotto il suo nome. In realtà tale regola era già nota a Leibniz, ma questo fatto fu per lungo tempo ignorato [cfr. Muir 1909-23]. A tale scopo, presi i coefficienti del sistema, si formi la tabella seguente, detta matrice del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Data una tabella quadrata A di numeri (matrice), è possibile costruire un numero, detto determinante della matrice, e indicato con $\det A$ ovvero $|A|$, secondo la formula

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

dove σ è una permutazione qualunque degli indici $1, 2, \ldots, n$ ed ε_σ, il suo segno, è $+1$ oppure -1 a seconda che il numero di inversioni necessarie per costruire σ sia pari o dispari. Pertanto tale determinante è somma di $n!$ termini. Per esempio:

per $n=2$ $\quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

per $n=3$ $\quad \det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

La regola di Cramer si può cosí formulare:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & a_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & a_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

ovvero l'i-esimo numero x_i della soluzione si esprime come quoziente di due determinanti di matrici: al denominatore la matrice A del sistema, al numeratore la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con i termini noti $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

L'espressione 'in generale' può ora essere precisata; il sistema ha un'unica soluzione se e solo se il determinante $\det A$ è diverso da zero. Se $\det A = 0$, può darsi che il sistema non abbia soluzioni, o che ne abbia infinite, come si vedrà fra breve.

2) In generale, data una matrice rettangolare

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e dati k indici $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ di colonna e k indici $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le m$ di riga, si può formare «il minore $k \times k$», indicato con $(i_1 i_2 \ldots i_k \mid j_1 j_2 \ldots j_k)$, estratto da tali righe e colonne. Esplicitamente

$$(i_1 i_2 \ldots i_k \mid j_1 j_2 \ldots j_k) = \begin{pmatrix} a_{j_1 i_1} & a_{j_1 i_2} & \ldots & a_{j_1 i_k} \\ a_{j_2 i_1} & a_{j_2 i_2} & \ldots & a_{j_2 i_k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{j_k i_1} & a_{j_k i_2} & \ldots & a_{j_k i_k} \end{pmatrix}$$

Si definisce rango della matrice B, $\mathrm{rk}B$, il massimo intero k per cui esista un minore $k \times k$ a determinante non nullo.

Il criterio per l'esistenza della soluzione al sistema di equazioni lineari (1) è il seguente

TEOREMA (Rouché-Capelli). *Il sistema è risolubile se e solo se le due matrici*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango.

3) Se questa condizione è verificata e se k $(\leq n)$ è il rango, il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni, nel senso che si precisa. Si può trovare una soluzione $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ del sistema (1). Ogni altra soluzione del sistema è della forma $(c_1+p_1, c_2+p_2, \dots, c_n+p_n)$ dove $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ è soluzione del sistema «omogeneo»

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di (2) si possono cosí descrivere: È sempre possibile trovare $n-k$ soluzioni $(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$, $(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_n^{(2)})$, ..., $(p_1^{(n-k)}, p_2^{(n-k)}, \dots, p_n^{(n-k)})$ con la proprietà che ogni altra soluzione, $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ di (2) si scrive nella forma

$$p_i = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j p_i^{(j)},$$

per ogni $i=1, 2, \dots, n$, dove gli $n-k$ coefficienti λ_j sono univocamente determinati.

In generale una matrice con h righe e k colonne ha rango uguale al minimo fra h e k (perché il rango sia inferiore occorre che siano verificate delle condizioni sui coefficienti); pertanto, se il numero m delle equazioni del sistema è superiore al numero n delle incognite, il teorema di Rouché-Capelli implica che non vi saranno (in generale) soluzioni.

Le stesse considerazioni giustificano le asserzioni fatte nel caso $m \leq n$.

Vi sono due osservazioni importanti relative all'analisi fatta per i sistemi lineari. La prima, piú superficiale, riguarda le notazioni usate: esse sono molto esplicite, ma pesanti da manipolare formalmente. La seconda, piú sostanziale, è che la teoria delle equazioni lineari esposta, in realtà, ha un campo assai piú vasto di applicazioni.

Si consideri per esempio l'equazione differenziale $y''+4y=x$. Una sua soluzione evidentemente è data da $y=f(x)=x/4$; ma ad essa si può aggiungere una qualunque soluzione dell'equazione omogenea $y''+4y=0$ ottenendo ancora una soluzione dell'equazione completa. D'altra parte l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea ha una struttura algebrica semplice: se $g(x)$, $h(x)$ sono soluzioni e a, b due numeri, anche $ag(x)+bh(x)$ è una soluzione; in effetti si vede facilmente che le soluzioni di tale equazione si esprimono in modo unico nella forma: $y=a\cos 2x+b\sin 2x$. Queste considerazioni e quelle che si esporranno nei paragrafi successivi hanno portato alla necessità di astrarre gli ingredienti essenziali della teoria delle equazioni lineari.

La prima nozione astratta che se ne deduce è quella di spazio vettoriale su un campo. (Si ricordi che un campo F è un campo di numeri ovvero un insieme astratto su cui si possono fare le quattro operazioni e con le regole usuali dell'algebra). Uno spazio vettoriale su un campo F è un insieme V, i cui elementi si chiamano vettori, munito di due operazioni: la somma $v+w \in V$ di due elementi qualunque $v, w \in V$; il prodotto $\alpha v \in V$ di $\alpha \in F$ con $v \in V$. Tali operazioni devono soddisfare (con $v, w, z \in V$; $\alpha, \beta \in F$) gli assiomi seguenti:

1) $v+w=w+v$
2) $(v+w)+z=v+(w+z)$
3) $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$
4) $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
5) $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$
6) $1v=v$.

I primi modelli di spazi vettoriali che vengono in mente sono: lo spazio formato dalle n-ple di numeri $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e gli spazi di funzioni.

Nella teoria astratta degli spazi vettoriali le nozioni fondamentali sono quelle di sottospazio $U \subseteq V$ (U un sottoinsieme chiuso rispetto a tutte le operazioni) e di combinazione lineare: dati elementi $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ si dice loro combinazione lineare un elemento della forma $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_k v_k$, con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F$. Da ciò si arriva alla nozione di dimensione. La dimensione di uno spazio V, indicata con $\dim V$, è il minimo numero di vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ per mezzo dei quali ogni altro vettore si possa esprimere per combinazione lineare; un tale insieme di vettori si chiamerà base di V. (Si osservi che la dimensione può anche essere infinita).

La formula fondamentale che regola la dimensione dello spazio e dei suoi sottospazi è quella di Grassmann: dati i sottospazi $U_1, U_2 \subseteq V$ si formi l'intersezione $U_1 \cap U_2$ e la somma $U_1+U_2=\{u_1+u_2;\ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, allora si ha $\dim(U_1 \cap U_2)+\dim(U_1+U_2)=\dim(U_1)+\dim(U_2)$.

La dimensione è un invariante fondamentale, per varie ragioni. È naturale nell'algebra astratta, dati due oggetti di un certo tipo, per esempio due campi, due gruppi, o, nel nostro caso, due spazi vettoriali, chiedersi se siano «uguali» da un punto di vista astratto. La formalizzazione di tale nozione si ha tramite la nozione di isomorfismo. Dati due insiemi con «struttura algebrica», G e G', un morfismo è un'applicazione $\varphi : G \to G'$ che rispetta tutte le operazioni presenti in G, G'; se φ è biunivoca essa si dice un isomorfismo. Si è

stati imprecisi nella nozione di struttura algebrica ma nel caso degli spazi vettoriali è possibile precisare: un morfismo (applicazione lineare) fra due spazi vettoriali V e W sul campo F è un'applicazione $f: V \to W$ per cui $f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v')$ per ogni $\alpha, \beta \in F$, $v, v' \in V$. Se f è biunivoca essa sarà un isomorfismo per definizione. Vale il fondamentale

TEOREMA. *V e W sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.*

In generale, data $f: V \to W$, l'immagine $f(V) = \{w \in W \mid w = f(v), v \in V\}$ è un sottospazio lineare di W, la cui dimensione è chiamata *rango* della f.

Si precisa ora il legame fra la teoria degli spazi vettoriali e la teoria delle equazioni lineari. Quest'ultima può descriversi nel linguaggio astratto degli spazi vettoriali e viceversa in base al seguente metodo di traduzione: Se V, W sono di dimensione finita, scelta una base $v_1, \ldots, v_n$ di V e una base $w_1, \ldots, w_m$ di W, ogni elemento v di V si scrive in modo unico nella forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \qquad \lambda_i \in F$$

e V viene così identificato (in modo isomorfo) ad F^n. Dunque se f è una applicazione lineare, $f: V \to W$, dagli assiomi si avrà:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$

ove $f(v_i) \in W$ e quindi

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \qquad a_{ji} \in F,$$

da cui

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i a_{ji} w_j.$$

Pertanto, dato

$$w = \sum_{j=1}^{m} b_j w_j,$$

il problema di risolvere l'equazione $f(x) = w$ è perfettamente equivalente a quello della soluzione del sistema

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

La matrice di tale sistema si chiama matrice di f nelle basi date. Il rango di tale matrice è il rango di f, e si indica con $\mathrm{rk}(f)$. Il sistema omogeneo associato definisce il sottospazio $\mathrm{Ker} f \subseteq V$, $\mathrm{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. Pertanto, nel linguaggio astratto, data una soluzione c di $f(x) = w$ le altre si ottengono trovando una base $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(h)}$ di $\mathrm{Ker} f$ e considerando gli elementi

$$c + \sum_{j=1}^{h} \lambda_j p^{(j)}.$$

Il «numero» di tali soluzioni, cioè la dimensione di $\mathrm{Ker} f$, è legato al rango $\mathrm{rk}(f)$ dalla formula

$$\dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rk}(f) = \dim V.$$

Si può precisare la struttura algebrica degli insiemi di matrici (rispettivamente: applicazioni lineari); si può procedere in due modi distinti, ma di fatto equivalenti. Si possono prima considerare le operazioni fra le applicazioni e poi tradurle in operazioni fra le corrispondenti matrici, oppure si possono definire direttamente le regole di somma e di prodotto fra matrici, ottenendo il calcolo matriciale. A questo proposito si osservi che la matrice di un'applicazione dipende dalle basi fissate negli spazi vettoriali, ma è facile esplicitare come essa vari quando si effettuino cambiamenti di base.

Si scrivono qui compattamente le formule fondamentali del calcolo matriciale. Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

due matrici (risp. $g, f: V \to W$ due applicazioni). Si pone

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

(risp. $(g+f)(v) = g(v) + f(v)$). Se A è la matrice di cui sopra, ed α appartiene al campo base F, si pone

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(risp. $\alpha f(v) = \alpha(f(v))$). Si riconosce allora che l'insieme delle matrici $m \times n$ (rispettivamente l'insieme delle applicazioni lineari di $V \to W$, indicato $\mathrm{Hom}(V, W)$) è uno spazio vettoriale di dimensione mn.

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \end{pmatrix}$$

rispettivamente $m \times n$ e $p \times m$, si definisce matrice prodotto di B e A (nell'ordine) la matrice $p \times n$:

$$BA = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

ove $c_{ij} = \sum_{h=1}^{m} b_{ih} a_{hj}$.

Intrinsecamente, se $f : V \to W$, $g : W \to Z$ sono applicazioni di cui A, B sono matrici, BA è la matrice della composizione $g \circ f : V \to W$, ove $(g \circ f)(v) = g(f(v))$. Nel caso in cui A e B siano entrambe $n \times n$, vale l'importante teorema che lega il prodotto fra matrici alla nozione di determinante: $\det(BA) = \det B \times \det A$. Si noti come il calcolo fra matrici $n \times n$ sia simile a quello fra numeri, nel senso che valgono tutte le proprietà formali del calcolo, ad eccezione delle due seguenti:

1) In genere non è vero che $AB = BA$: se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Data una matrice $A \neq 0$, in generale non si può trovare una matrice B (denotata anche con A^{-1}), per cui valga $AB = I$, ove I è la matrice $n \times n$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(ovvero la matrice della applicazione identica $1_V : V \to V$, con $1_V(v) = v$ per ogni $v \in V$). Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Infatti tale matrice $B = A^{-1}$ si può trovare, ed è unica, se e solo se $\det A \neq 0$ e la regola di Cramer per i sistemi lineari permette poi facilmente di vedere come si determini A^{-1} a partire dalla matrice A. La matrice A^{-1} prende il nome di matrice inversa della matrice A.

Se $f : V \to V$ è una applicazione lineare di uno spazio V di dimensione finita n in se stesso allora f è un isomorfismo se e solo se il determinante della matrice di f, in una base data, è non nullo. Se A, A' sono le matrici di f in due basi distinte, si ha $\det A = \det A'$ e $A' = BAB^{-1}$, ove B è una matrice quadrata $n \times n$ a determinante non nullo, e B^{-1} è la matrice quadrata $n \times n$, determinata dalla proprietà $BB^{-1} = I$. Pertanto il determinante di una trasformazione lineare f è un invariante, nel senso che è indipendente dalla scelta d'una base in V.

Si è fin qui visto come si corrispondono la teoria dei sistemi lineari e la teoria delle matrici o delle trasformazioni lineari. Nel caso che le soluzioni del sistema vengano ricercate in un particolare insieme di numeri, la corrispondente teoria delle matrici può essere sviluppata anche per via aritmetica. Gauss, per esempio, studiò la risolubilità di un sistema in cui i coefficienti e le soluzioni ricercate sono numeri interi: nel caso $n = m$ non basta piú supporre non nullo il determinante della matrice dei coefficienti; è sufficiente invece che valga ± 1.

Piú in generale si può sempre trasformare un sistema in uno equivalente, ovvero trasformare una matrice A in $A' = BAC$ con $\det(B) = \det(C) = 1$ (B, C a coefficienti interi) in modo tale che

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

e $d_1 | d_2$, $d_2 | d_3$, ..., $d_{n-1} | d_n$ ($|$ significa «divide»). $d_1, d_2, \dots, d_n$, invarianti aritmetici di A, non cambiano moltiplicando A a destra o a sinistra per una matrice intera di determinante $+1$; il prodotto $d_1 d_2 \dots d_i$ dei primi i elementi è il MCD dei determinanti dei minori $i \times i$ estratti dalla matrice A. Fatta questa trasformazione, l'esistenza o meno della soluzione del sistema dipende solo da proprietà di divisibilità. Si può anche studiare il sistema come sistema di congruenze, riducendo tutti i coefficienti modulo p; si verifica allora che il sistema è risolubile con soluzione intera se e solo se è risolubile come sistema di congruenze modulo ogni numero p primo (di fatto basta eseguire un numero finito di verifiche).

Si può infine notare un legame tra la teoria dei sistemi lineari e quella delle equazioni algebriche. Infatti se si impone ad un polinomio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di annullarsi per un valore $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, di fatto si scrive un'equazione lineare nei coefficienti del polinomio. Ad esempio si arriva ad esplicitare il risultante di due polinomi $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, e $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ (cfr. § 1) come determinante della matrice (formula di Sylvester):

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ 1 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m \end{pmatrix}$$

3. *Coniche, forme quadratiche e simplettiche.*

Il passo successivo nello studio delle equazioni algebriche è rappresentato, seguendo lo sviluppo storico della teoria, dallo studio di una equazione di secondo grado in n variabili (prima di tutto ovviamente è stato sviluppato il caso $n=2$).

È conveniente porre l'equazione nella forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i - c = \mathbf{Q}(x) + \varphi(x) - c = 0$$

ove $\mathbf{Q}(x)$ è la parte quadratica omogenea che per ipotesi soddisfa la $a_{ij} = a_{ji}$; $\varphi(x)$ è la parte lineare della f. Per $n=2$ l'equazione descrive un luogo piano, cioè una curva, nota col nome di conica; per $n=3$ un luogo nello spazio, cioè una superficie, nota col nome di quadrica.

La teoria per le equazioni quadratiche assume forme profondamente diverse a seconda che se ne studino gli aspetti algebrico-geometrici, cioè le soluzioni nel caso complesso o reale, ovvero se ne studino gli aspetti aritmetici.

3.1. Aspetto algebrico-geometrico.

È conveniente dal punto di vista astratto in cui ci si pone ormai comunemente prescindere dalla considerazione di un sistema di coordinate esplicito per poter arrivare, tramite cambiamenti di variabili, a porre l'equazione in forma canonica.

Scritta l'equazione nella forma $\mathbf{Q}(x) + \varphi(x) = c$, si studia il caso in cui la parte lineare sia identicamente nulla. L'equazione pertanto si scriverà nella forma $\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ dove $\mathbf{Q}$ è una espressione omogenea e quadratica. Considerando $x_1, \ldots, x_n$ come coordinate di un vettore di uno spazio vettoriale V ad n dimensioni, $\mathbf{Q}$ si può descrivere come una applicazione $\mathbf{Q} : V \to F$ (F il campo di numeri su cui si lavora). La proprietà di quadraticità si può esprimere dicendo che la funzione di due variabili vettoriali $B(v, w) = (\mathbf{Q}(v+w) - \mathbf{Q}(v) - \mathbf{Q}(w))/2$ è bilineare, cioè lineare in v e w. In coordinate, se $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ allora $B(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum a_{ij}x_i\xi_j$. La forma $B(v, w)$, che è determinata dalla $\mathbf{Q}$, è «simmetrica», cioè $B(v, w) = B(w, v)$.

Tale forma permette di dare una nozione di «ortogonalità» fra vettori di V; si dirà che «v è ortogonale a w» (secondo B) (in simboli $v \perp w$) se $B(v, w) = 0$. Lo spazio U dei vettori ortogonali ad ogni altro vettore è il nucleo della forma.

Geometricamente si esprime, per esempio nel caso $n=3$, cosa vuol dire che la forma ha un nucleo di dimensione 1. Si scelga una base dello spazio V in cui U sia l'asse z, e quindi il vettore $(0, 0, z)$ è ortogonale al vettore (ξ_1, ξ_2, ξ_3) per ogni scelta di z e ξ_1, ξ_2, ξ_3. Questo implica che alcuni coefficienti a_{ij} di B sono nulli e la quadrica $\mathbf{Q}$ si scrive nella forma $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - c = 0$ ovvero è il cilindro con generatrici parallele all'asse z e passante per i punti della conica data dalla medesima equazione nel piano x, y.

Il fatto ora descritto è del tutto generale; se $U \neq 0$ la quadrica si può vedere, nello stesso modo, come una forma in un numero inferiore di variabili ovvero come cilindro.

Il caso piú interessante è perciò il caso $U = 0$ (caso della forma non degenere). Esso si individua mediante la seguente condizione algebrica: costruita la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

associata alla forma $\sum a_{ij}x_i\xi_j$, si ha che $U = 0$ se e solo se $\det A \neq 0$.

La forma quadratica $\mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ può essere scritta in «forma canonica», ossia con un'equazione particolarmente semplice, facendo uso di un cambiamento lineare di variabili. Tale forma canonica dipende però dal campo di numeri in considerazione.

Una forma quadratica sui complessi si può scrivere in modo unico nella forma standard

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (x_i)^2,$$

e risulta non degenere se e solo se $k = n$. In ogni caso il numero k è determinato intrinsecamente dalla forma $\mathbf{Q}$ e costituisce un invariante fondamentale della forma quadratica sui complessi.

Una forma quadratica sui reali si può scrivere in modo unico con la seguente espressione

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{h} (x_i)^2 - \sum_{i=h+1}^{h+k} (x_i)^2$$

e la forma è non degenere se e solo se $h + k = n$. Si ha che i numeri h, k sono determinati intrinsecamente dalla forma (legge di inerzia di Sylvester). Se la forma $\mathbf{Q}$ è non degenere vi è un modo semplice di calcolare h e k. Se A è la matrice simmetrica della forma $\mathbf{Q}$, considerati i determinanti dei minori:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = |A|$$

vale la seguente regola di Cayley: i numeri h e k sono calcolabili a partire dai cambiamenti di segno nella successione $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$. È conveniente introdurre come invariante fondamentale di una forma quadratica reale il numero $h - k$ detto segnatura.

Un'applicazione della legge di inerzia di Sylvester è la seguente: dato un

polinomio $f(x)$ a coefficienti reali e con radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, si può costruire la matrice simmetrica, detta bezoutiante, definita dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ (\alpha_1)^2 & (\alpha_2)^2 & \ldots & (\alpha_n)^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (\alpha_1)^{n-1} & (\alpha_2)^{n-1} & \ldots & (\alpha_n)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & (\alpha_1)^2 & \ldots & (\alpha_1)^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & (\alpha_2)^2 & \ldots & (\alpha_2)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & \alpha_n & (\alpha_n)^2 & \ldots & (\alpha_n)^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_{n-1} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

ove $\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j)^i$ è una funzione simmetrica delle radici e quindi si può calcolare, ricorsivamente, a partire dai coefficienti di $f(x)$, secondo formule semplici dovute a Newton. La bezoutiante corrisponde ad una forma quadratica la cui segnatura coincide con il numero di radici reali di $f(x)$. Si ottiene cosí un legame fra la legge d'inerzia e il teorema di Sturm (cfr. § 2).

Si ritorni ora al caso generale in cui l'equazione di secondo grado $f(x_1, \ldots, x_n)$ sia completa e quindi del tipo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_n) + \varphi(x_1, \ldots, x_n) - c = 0.$$

Effettuando un cambiamento di variabili è facile vedere che ci si può sempre ridurre, nel caso reale, ad una delle seguenti forme canoniche:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{h} (x_i)^2 - \sum_{i=h+1}^{m} (x_i)^2 = c \qquad c = 0, \pm 1$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{h} (x_i)^2 - \sum_{i=h+1}^{m} (x_i)^2 - x_{m+1} = 0.$$

Nel caso complesso si hanno le stesse espressioni canoniche con $h = m$. Per esempio nel caso $n = 2$ si ha la seguente classificazione (affine) delle coniche reali.

$x^2 + y^2 = 1$	ellisse (equivalente alla circonferenza)
$x^2 + y^2 = -1$	conica immaginaria non degenere
$x^2 - y^2 = 1$	iperbole
$x^2 - y = 0$	parabola
$x^2 - y^2 = 0$	due rette distinte reali
$x^2 + y^2 = 0$	due rette distinte immaginarie
$x^2 = 0$	due rette coincidenti.

Si potrebbe altrettanto facilmente esplicitare il risultato per quadriche reali; ci si limiterà solo ad osservare che se una forma quadratica $\mathbf{Q}$ è indefinita (cioè non è solo positiva o solo negativa), esistono spazi lineari formati interamente da vettori «isotropi» cioè con $\mathbf{Q}(v) = 0$. Tale osservazione permette di riconoscere sistemi di rette all'interno di quadriche che le presentano come superfici «rigate», cioè ottenute movendo una retta nello spazio.

All'inizio dello studio di tipo algebrico-geometrico si è visto come si possa associare ad una forma quadratica $\mathbf{Q}(x)$ una forma bilineare simmetrica $B(x, y)$ da essa determinata e fare lo studio della $\mathbf{Q}$ studiando la B. Si possono prendere in esame forme bilineari $B(x, y)$ godenti della proprietà $B(x, y) = -B(y, x)$, cioè forme bilineari antisimmetriche, ovvero simplettiche. In questo caso la teoria corrispondente è particolarmente semplice:

1) Se la forma $B(x, y)$ è non degenere, la dimensione dello spazio vettoriale V cui appartengono i vettori x e y è di dimensione pari $2m$. In questo caso la forma si può portare, con un cambiamento di variabili, alla «forma canonica»:

$$B(x, y) = B((x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), (y_1, \ldots, y_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \bar{y}_i - \bar{x}_i y_i).$$

2) In ogni caso la matrice $A = (a_{ij})$ della forma (ove $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ è il valore della forma calcolata su due vettori e_i, e_j della base dello spazio vettoriale V), è una matrice antisimmetrica, ossia risulta $a_{ij} = -a_{ji}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & & \\ -a_{13} & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ -a_{1n} & \ldots & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det A = 0$ se n è dispari. Se $n = 2m$ allora $\det A = (\mathrm{Pf}(A))^2$, dove $\mathrm{Pf}(A)$ è un polinomio, detto pfaffiano della matrice A, che si esprime con la formula di Jacobi-Cayley:

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^m} \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)\,\sigma(2)} a_{\sigma(3)\,\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2m-1)\,\sigma(2m)}.$$

Per esempio:

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) = \frac{1}{2} \cdot 2a_{12} \qquad (a_{21} = -a_{12}).$$

Infine, su uno spazio vettoriale V sui complessi è utile considerare le forme hermitiane, cioè le forme $H(x, y)$ $(x, y \in V)$, lineari in x ed antilineari in y, tali quindi che

$$H(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 H(x_1, y) + \alpha_2 H(x_2, y)$$

$$H(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 H(x, y_1) + \bar{\beta}_2 H(x, y_2)$$

($\bar{\beta}_i$ coniugato di β_i). Per esse risulta quindi $H(x,y)=\overline{H(y,x)}$. Se $H(x,x)>0$ per ogni $x\neq 0$ allora la forma si dice positiva. Rispetto ad una base $e_1, \ldots, e_n$ di V, posto $a_{ij}=H(e_i, e_j)$, risulta $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$ ed inoltre

$$H(x,y)=H\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right)=\sum a_{ij} x_i \bar{y}_j.$$

Il numero complesso $H(x,y)$, valore di H sulla coppia di vettori x e y, si può scrivere come somma della sua parte reale ed immaginaria $H(x,y)=S(x,y)+ +iA(x,y)$. Si vede facilmente che S ed A sono forme bilineari sullo spazio V considerato come spazio reale e sono rispettivamente la prima simmetrica e la seconda simplettica.

Uno spazio V con una forma hermitiana positiva prende il nome di «spazio di Hilbert»; tale nozione si generalizza ed è particolarmente importante, anche nel caso che la dimensione di V sia infinita.

3.2. Aspetto aritmetico.

Esso è notevolmente piú complesso; se si studiano le soluzioni, ad esempio razionali, di una equazione quadratica,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

si può prima di tutto metterla in forma diagonale

$$\sum_{i=1}^{m} a_i (x_i)^2 = 0$$

(si esclude il caso banale in cui ci sia un termine lineare).

I numeri a_i non sono univocamente determinati, ma evidentemente possono essere modificati a meno di quadrati cambiando le variabili (questa è la ragione della forma semplice sui reali o sui complessi in cui i coefficienti si possono ridurre tutti a ± 1, rispettivamente a $+1$). Lo studio di una tale equazione si svolge nel modo seguente: si assume di aver scelto gli a_i interi; allora, oltre all'equazione data, si possono considerare le congruenze $\sum_{i=1}^{m} a_i (x_i)^2 \equiv 0 \bmod q$ (dove $a\equiv b \bmod q$ significa $q \mid a-b$), essendo q un numero preassegnato. Il principio fondamentale che permette di risolvere il problema aritmetico è dato dal seguente

TEOREMA (Hasse-Minkowski). *L'equazione* $\sum_{i=1}^{m} a_i (x_i)^2 = 0$ *ha una soluzione razionale non nulla se e solo se ha una soluzione reale non nulla, e, come congruenza* $\bmod q$, *ha una soluzione non nulla per ogni* q *sufficientemente grande.*

Il principio esposto si presta a una verifica in termini di invarianti della forma quadratica. Per la soluzione reale basta che la forma sia indefinita. Per quanto riguarda le congruenze ci si può ridurre a priori ad un numero finito di verifiche. In effetti se $m\geq 5$ tutte le congruenze sono automaticamente risolubili. In ogni caso il punto cruciale della riduzione è la legge di reciprocità quadratica di Gauss [1801], che domina il caso piú semplice dell'equazione $ay^2\equiv x^2 \bmod p$ (caso $m=2$). Si indica con $\left(\frac{a}{p}\right)$ il simbolo di Legendre, ove $\left(\frac{a}{p}\right)=\pm 1$ a seconda che la congruenza scritta abbia o no una soluzione non nulla. La legge di reciprocità afferma allora che:

1) $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ per p e q due primi dispari

2) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ per p un primo dispari

3) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ per p un primo dispari.

Questa legge fondamentale permette, dato un primo p, di considerare un numero finito di progressioni aritmetiche $ax+b_1$, $ax+b_2$, ..., tali che p è residuo quadratico $\bmod q$ se solo se q appartiene ad una tale progressione.

Tramite la legge di reciprocità ed ulteriori considerazioni sul simbolo di Legendre è possibile studiare effettivamente il problema delle congruenze $\sum_i a_i (x_i)^2 \equiv 0 \bmod q$ [cfr. Borevich e Shafarevich 1966].

4. *Curve algebriche piane e loro invarianti proiettivi.*

Nell'ordine di idee in cui ci si è posti, il caso successivo da trattare, nello studio delle equazioni algebriche, è quello di un'equazione in due variabili e di grado n qualunque (si osservi che il primo caso ancora non trattato è $n=3$).

Questo studio porta all'introduzione di idee nuove appartenenti a vari rami della matematica: l'idea algebrico-geometrica di una geometria con gruppo strutturale, l'idea topologico-analitica di superficie di Riemann, la teoria degli integrali abeliani. Ciascuna di queste teorie comporta la considerazione di invarianti opportuni di natura diversa; si accennerà qui solo ad alcuni degli invarianti principali (cfr. anche l'articolo «Geometria e topologia» in questa stessa *Enciclopedia*). In questo paragrafo, in particolare, si cercherà di mettere in luce il passaggio fra l'aspetto algebrico relativo allo studio di una equazione e la genesi della geometria algebrica, in particolare la geometria proiettiva.

Sia $f(x,y)$ un polinomio di grado n; esso può essere scritto nella forma

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{m} g_i(y) x^i,$$

ove $g_i(y)$ è un polinomio in y. Si può risolvere l'equazione $f(x,y)=0$ assegnando un valore $\bar{y}$ alla y e calcolando le m radici dell'equazione (in x)

$$\sum_{i=0}^{m} g_i(\bar{y}) x^i = 0.$$

Procedendo in questo modo ci si accorge dei due seguenti fenomeni: 1) per alcuni valori di $\bar{y}$ le m radici possono non essere distinte; 2) per alcuni valori di $\bar{y}$ l'equazione in esame può abbassarsi di grado.

Si analizzi il secondo caso: se si fa variare y con continuità verso il valore $\bar{y}$ per il quale l'equazione si abbassa di grado, almeno una radice tende verso l'infinito. Il metodo usato per descrivere questo fenomeno, e che ha portato a frutti notevoli nell'algebra e nella geometria, può essere descritto come segue. Si raccolgono innanzitutto nel polinomio $f(x, y)$ le sue parti omogenee, cioè

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j \right);$$

si associa quindi un polinomio omogeneo di grado n (forma), introducendo una nuova variabile z:

$$\psi(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j \right).$$

Si hanno le relazioni $f(x, y) = \psi(x, y, 1)$ e $\psi(x, y, z) = z^n f(x/z, y/z)$, le quali mostrano il legame fra le soluzioni di $f = 0$ e quelle di $\psi = 0$. In particolare si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra le soluzioni di $f = 0$ e quelle soluzioni di $\psi = 0$ per cui $z \neq 0$, pur di considerare, per quest'ultima equazione, equivalenti tutte le soluzioni fra loro proporzionali. Le soluzioni di $\psi = 0$ per cui $z = 0$ si possono pensare come soluzioni «all'infinito» di $f = 0$.

La costruzione algebrica ora effettuata diventa chiara quando se ne considera la geometria soggiacente. Ogni terna di numeri (x_0, y_0, z_0) e tutte le terne ad essa proporzionali, cioè $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ con $\lambda \neq 0$, si considerano come terne di coordinate di un «punto»; si esclude solo la terna $(0, 0, 0)$. L'insieme di questi «punti» si chiama piano proiettivo. Si è ottenuto cosí un ampliamento del piano (affine) usuale di coordinate x, y, nel senso che i punti del piano proiettivo corrispondenti alle terne omogenee $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ con $z_0 \neq 0$ possono essere scritte in modo unico come $(x, y, 1)$; i punti per cui $z_0 = 0$ sono detti «punti all'infinito» del piano affine; essi costituiscono la «retta all'infinito».

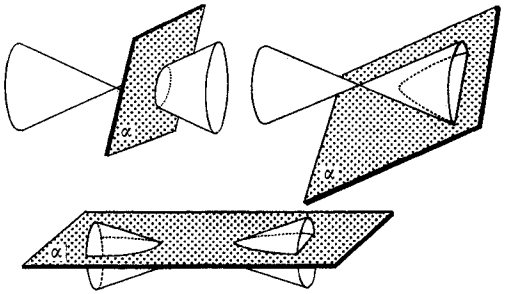


Figura 1.
Ellisse, parabola ed iperbole come sezioni coniche.

Questa costruzione algebrica del piano proiettivo scaturisce da operazioni di proiezione e sezione dello spazio, quest'ultime sviluppate già nel Rinascimento con lo studio della prospettiva. Un esempio significativo è il seguente. Si seghi un cono con un piano α tale che la sezione (conica) sia una ellisse. Se si sposta il piano fino a renderlo parallelo ad una generatrice, la conica sezione diventa una parabola. Un ulteriore spostamento del piano permette di ottenere una iperbole (cfr. fig. 1).

Le operazioni di sezione effettuate sul cono sono equivalenti alla considerazione di una ellisse che si muova su un piano proiettivo fino a divenire tangente alla retta all'infinito (parabola) e successivamente a segarla in due punti (iperbole) (cfr. fig. 2). La giustificazione intuitiva di quest'ultima affermazione si ottiene considerando in un piano π una sua retta r qualunque (al finito) ed una ellisse che muovendosi si porti successivamente nella posizione tangente o secante (fig. 3). Proiettando da un punto S non appartenente a π su un piano π' parallelo al piano α determinato da r ed S si vede che i punti di r vanno «all'orizzonte», cioè «all'infinito» e quindi un'ellisse in π si proietta in una ellisse, parabola o iperbole rispettivamente a seconda della sua posizione rispetto ad r. La proiezione da S del piano π sul piano π' fornisce un primo esempio di trasformazione fra piani che muta rette in rette e trasforma una retta r (al finito) nella retta all'infinito. Con questo, dopo aver introdotto la retta all'infinito ci si è liberati del suo carattere privilegiato. Portando fino in fondo questo punto di vista si arriva alla considerazione del gruppo delle trasformazioni proiettive che, nel piano proiettivo reale, sono caratterizzate geometricamente dalla proprietà di mutare rette in rette, e che algebricamente si possono esprimere nella forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \qquad \text{con } \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0.$$

L'equivalenza fra la caratterizzazione algebrica e quella geometrica dipende dalla proprietà, specifica del campo reale, di non possedere automorfismi. Se si prende solo il punto di vista algebrico è d'altra parte evidente come vadano

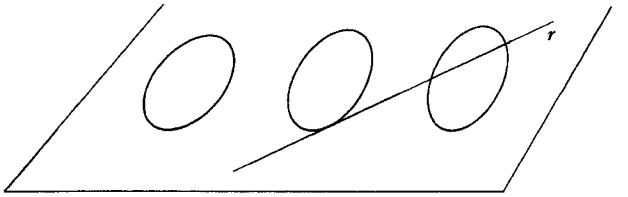


Figura 2.
Posizioni reciproche di una retta e di una ellisse.

estese le definizioni di spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbf{P}^n(F)$ su un campo F qualunque e il corrispondente gruppo proiettivo.

Il problema centrale della geometria proiettiva è quello di classificare le configurazioni geometriche e le forme a meno di trasformazioni proiettive. Tale problema ha una soluzione completa solo in casi particolari; in generale si cerca di costruire opportuni invarianti che descrivono proprietà dell'oggetto in esame anche se non lo classificano completamente.

L'esempio piú semplice in cui si ottiene una classificazione proiettiva completa è costituito dalle coniche. Nel caso reale, data una equazione omogenea di secondo grado, con una trasformazione proiettiva, essa si muta in una ed una sola delle seguenti equazioni:

$x^2+y^2+z^2=0$	conica immaginaria
$x^2+y^2-z^2=0$	conica reale
$x^2-y^2=0$	conica degenere reale
$x^2+y^2=0$	conica degenere immaginaria
$x^2=0$	conica doppiamente degenere.

La distinzione affine fra ellisse, iperbole e parabola, di cui si è parlato nel § 3, non esiste piú; essa però può riottenersi dalla classificazione proiettiva introducendo una retta privilegiata e l'informazione suppletiva del tipo d'intersezione che la conica ha con tale retta.

Il luogo $\mathcal{C}$ degli zeri di una forma $f(x, y, z)$ di grado n si chiama curva algebrica di ordine n. L'ordine di una curva algebrica ha un significato intrinseco, ossia invariante rispetto a trasformazioni proiettive; geometricamente esso rappresenta il numero di punti in cui $\mathcal{C}$ interseca una retta r generica. In effetti il numero di punti in cui $\mathcal{C}$ interseca una retta fissata può essere inferiore ad n; di fatto si può attribuire a ciascun punto d'intersezione una molteplicità maggiore o uguale a 1, molteplicità che descrive il tipo di contatto fra la curva e la

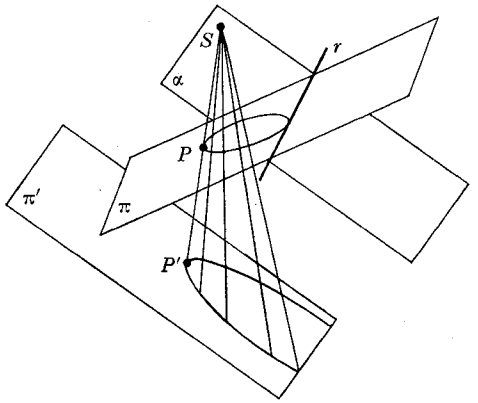


Figura 3.
Proiezione di una ellisse del piano π da un punto $S \notin \pi$.

retta. Piú in generale, date due curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ di ordini n ed n' si può assegnare a ciascun punto di intersezione di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ una molteplicità in modo tale che la somma delle molteplicità sia esattamente $m \cdot n$ (teorema di Bezout).

Una curva di ordine n, $f(x, y, z)=0$, possiede molti invarianti, relativi ad esempio alla natura dei suoi punti o delle sue tangenti. Dato un punto $P=(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ ed una retta r per esso, la molteplicità di intersezione in P fra r e $\mathcal{C}$ è in generale 1 per ogni posizione di r, ad eccezione di una ben determinata retta, detta retta tangente, di equazione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P z=0.$$

Un tale punto si chiama semplice.

Può però accadere che nel punto P si annullino le tre derivate parziali $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$; in tal caso ogni retta r per P ha molteplicità di intersezione maggiore di 1 in P con $\mathcal{C}$. Un tale punto si dice singolare per la curva; anche per esso può definirsi una nozione di retta tangente nel punto, ma il numero di tali tangenti è maggiore di 1 (cfr. fig. 4), in generale.

Le nozioni di punto semplice, singolare e retta tangente sono invarianti proiettivi. Nel caso dei punti singolari e delle tangenti si può fare un'analisi piú approfondita e dedurre una vasta classe di invarianti (analisi tramite gli scoppiamenti: cfr. il già citato articolo «Geometria e topologia», p. 654, nel vol. VI di questa stessa *Enciclopedia*).

Una delle idee chiave della geometria proiettiva è quella di considerare le curve $\mathcal{C}$ di grado n fissato come uno spazio proiettivo di dimensione $n(n+3)/2$, assumendo come coordinate proiettive di $\mathcal{C}$ i coefficienti di una sua equazione. Per esempio le rette del piano formano esse stesse un piano detto «piano duale» del piano dato.

L'imporre ad una curva $\mathcal{C}$ il passaggio per un punto P semplice è equivalente a scrivere un'equazione lineare sui coefficienti; se il punto è doppio si ottengono tre condizioni lineari, ecc. Uno dei problemi centrali della geometria algebrica è lo studio delle curve che soddisfano a varie condizioni lineari, dette anche sistemi lineari di curve. Tale studio è stato grandemente facilitato dalle

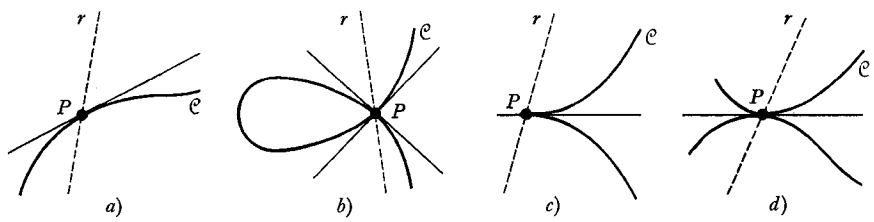


Figura 4.
a) punto semplice; *b*), *c*), *d*) punti singolari con tangenti distinte o coincidenti.

tecniche sviluppate negli ultimi vent'anni, in particolare dalla teoria dei fasci (cfr. § 12).

Si torna ora ad esempi piú classici che porteranno nel vivo della teoria degli invarianti del secolo scorso.

Si supponga di voler determinare le condizioni affinché una curva $f(x, y, z) = 0$ di grado n non abbia punti singolari. Questo evidentemente vuol dire che il sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ha soltanto la soluzione nulla. Poiché

$$f = \frac{1}{n}\left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

basta studiare l'incompatibilità del sistema delle derivate parziali prime. A tale scopo si moltiplicano le equazioni in esame per opportuni monomi in x, y, z, in modo da ottenere un sistema di equazioni, lineari nei coefficienti delle forme, che abbia lo stesso numero di equazioni e di incognite. Il sistema originario è incompatibile se e solo se quest'ultimo è incompatibile, cioè se il determinante Δ dei coefficienti è non nullo. Tale determinante è un polinomio nei coefficienti della forma $f(x, y, z)$ detto discriminante ed è un invariante proiettivo nel senso specificato nel paragrafo successivo.

Un secondo esempio si ottiene considerando la hessiana di una forma $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ di grado n. Essa è definita da

$$H(x, y) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j$$

ove si è introdotta una nuova serie di variabili y. Pensata la $H(x, y)$ come una forma quadratica nelle variabili y se ne può formare il discriminante $h(x)$, che è una forma di grado $m(n-2)$ nelle sole x_i. L'intersezione fra $f(x) = 0$ e $h(x) = 0$ avviene in punti di natura particolare per $f = 0$ (punti doppi, punti di flesso). L'analisi di questo fenomeno porta, anche in questo caso, all'introduzione di invarianti proiettivi.

Uno degli invarianti principali in una curva piana $\mathcal{C}$ si ottiene dalla considerazione dei suoi punti singolari. Se $\mathcal{C}$ è irriducibile e di grado n, può possedere al piú $(n-1)(n-2)/2$ punti doppi; se li possiede tutti può essere parametrizzata biunivocamente (tranne un numero finito di eccezioni) in forma razionale con un parametro t. Piú in generale se possiede ν punti doppi, il numero

$[(n-1)(n-2)/2] - \nu$ è un invariante proiettivo detto deficienza. Il suo significato viene esplicitato tramite la considerazione della superficie di Riemann Σ associata a $\mathcal{C}$; in tal modo si vede che esso è un invariante puramente topologico, detto anche genere di Σ, che verrà descritto nel § 11.

5. *Invarianti e covarianti. Il metodo simbolico.*

Dalle considerazioni svolte nel paragrafo precedente si vede il ruolo centrale attribuito al gruppo proiettivo nello studio delle forme algebriche. Si è già visto come esso operi sui punti, sulle rette e sulle coniche. Prima di affrontare il problema generale degli invarianti, si vuole fornire un ulteriore esempio. Un teorema fondamentale di geometria proiettiva afferma che date $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ due quaterne di punti nel piano proiettivo, tali che in ciascuna quaterna tre dei quattro punti non sono mai allineati esiste un'unica trasformazione proiettiva A con $A(\alpha) = \alpha'$, $A(\beta) = \beta'$, $A(\gamma) = \gamma'$, $A(\delta) = \delta'$. All'opposto, prese due quaterne di punti allineati non è detto che l'una sia trasformabile nell'altra. Per esempio, se entrambe sono formate da punti distinti, la condizione di equivalenza proiettiva è fornita dalla considerazione di un invariante fondamentale: il birapporto. Dati sulla retta i punti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ il loro birapporto è dato dall'ascissa del punto δ quando si assume il riferimento in modo tale che ai punti α, β, γ corrispondano rispettivamente le ascisse $0, 1, \infty$. Il birapporto è essenzialmente l'unico invariante proiettivo delle quaterne di punti allineati, nel senso che tali quaterne sono proiettivamente equivalenti se e solo se esse hanno lo stesso birapporto.

Nella teoria classica degli invarianti del secolo XIX il primo problema che si è studiato è stato quello di trovare tutti gli invarianti di alcune configurazioni geometriche, per poterle classificare.

Procedendo con un esempio, si considerino tre punti nel piano $X_0 = (x_{00}, x_{10}, x_{20})$, $X_1 = (x_{01}, x_{11}, x_{21})$, $X_2 = (x_{02}, x_{12}, x_{22})$ e si formi il determinante della matrice

$$X = \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

Applicando una trasformazione proiettiva, di matrice A, si otterranno tre nuovi punti le cui coordinate sono le colonne della matrice $X' = AX$. Pertanto $\det X' = (\det A) \cdot (\det X)$. In particolare $\det X = 0$ se e solo se $\det X' = 0$; questa condizione è equivalente all'essere i tre punti allineati. Il fatto che il determinante di X, pensato come polinomio nelle coordinate dei tre punti, viene moltiplicato per $\det A$, tramite la trasformazione proiettiva, si esprime dicendo che esso è un seminvariante o invariante proiettivo relativo. Piú in generale, dati $n+1$ punti $X_0 = (x_{00}, x_{10}, x_{20}), \ldots, X_n = (x_{0n}, x_{1n}, x_{2n})$, un polinomio $f(x_{ij})$ nelle coordinate di tali punti si dirà seminvariante se, data una trasformazione

proiettiva di matrice $A=(a_{ij})$ e dette $(x'_{0i}, x'_{1i}, x'_{2i})$ le coordinate di AX_i, si ha $f(x_{ij})=\psi(A)\,f(x'_{ij})$, $\psi(A)$ un numero dipendente solo da A. Si ha allora il

TEOREMA (Cayley). *1) $\psi(A)=\det(A)^m$, per m opportuno. 2) f è un polinomio nei determinanti*

$$\Delta_{ijk}=\begin{vmatrix} x_{0i} & x_{0j} & x_{0k} \\ x_{1i} & x_{1j} & x_{1k} \\ x_{2i} & x_{2j} & x_{2k} \end{vmatrix}$$

Si osservi che tale invariante dipende a priori dalle coordinate scelte a meno di un fattore di proporzionalità.

È possibile, d'altra parte, costruire invarianti assoluti in modo facile; per esempio per cinque punti X_i, $i=0, 1, 2, 3, 4$, la funzione

$$\frac{\Delta_{012}\ \Delta_{034}}{\Delta_{013}\ \Delta_{024}}$$

è invariante assoluto.

Si è osservato che una trasformazione proiettiva A del piano muta rette in rette e che l'insieme delle rette è esso stesso un piano, coordinatizzato dai coefficienti (a_0, a_1, a_2) dell'equazione della retta $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$. La trasformazione A' indotta sulle rette è ancora una trasformazione proiettiva, la cui matrice si può calcolare a partire dalla matrice di A. Sia infatti $B=(b_{ij})$ la matrice inversa della matrice A; si ha allora che la matrice di A' è la cosiddetta «trasposta» di B, cioè è ottenuta da B scambiando le righe con le colonne.

Dati i punti $X_i=(x_{0i}, x_{1i}, x_{2i})$ e rette $r_j=(a_{0j}, a_{1j}, a_{2j})$ si possono studiare gli invarianti simultanei. Si ha il

TEOREMA. *Ogni invariante relativo è un polinomio nei determinanti*

$$\Delta_{ijk}=\begin{vmatrix} x_{0i} & x_{0j} & x_{0k} \\ x_{1i} & x_{1j} & x_{1k} \\ x_{2i} & x_{2j} & x_{2k} \end{vmatrix} \qquad \Gamma_{ijk}=\begin{vmatrix} a_{0i} & a_{1i} & a_{2i} \\ a_{0j} & a_{1j} & a_{2j} \\ a_{0k} & a_{1k} & a_{2k} \end{vmatrix}$$

e nei «prodotti scalari» $a_{0s}x_{0t}+a_{1s}x_{1t}+a_{2s}x_{2t}$.

I teoremi enunciati valgono piú in generale per spazi proiettivi a n dimensioni; in questo caso i determinanti sono formati con $n+1$ righe e colonne.

Le ricerche del secolo scorso partivano dai teoremi enunciati per trovare gli invarianti di altri oggetti, per esempio delle curve o ipersuperfici. In generale nello spazio proiettivo a n dimensioni si considerano le forme di grado m

$$\sum_{m=i_0+i_1+\ldots+i_n} a_{i_0i_1\ldots i_n}x_0^{i_0}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}.$$

Gli zeri di un tale polinomio sono per definizione i punti di una ipersuperficie di grado m. I coefficienti di una forma possono essere considerati come coordinate di un punto di uno spazio proiettivo di dimensione $\binom{m+n}{n}$. Il gruppo proiettivo sullo spazio ad n dimensioni induce un gruppo di proiettività su questo nuovo spazio il quale, tranne il caso $m=1$, è effettivamente distinto dal gruppo di tutte le trasformazioni proiettive. La ricerca algebrica degli invarianti delle forme consiste nel trovare i polinomi, $g(a_{i_0i_1\ldots i_n})$, nei coefficienti della forma, che risultino seminvarianti rispetto a tali trasformazioni. Per esempio nel caso di una quadrica $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij}=a_{ji}$, un invariante è il discriminante Δ, cioè il determinante della matrice simmetrica (a_{ij}). Cambiando infatti le coordinate con una trasformazione proiettiva di matrice A, il nuovo discriminante Δ' è dato da $\det(A)^2\cdot\Delta$. Si può facilmente verificare che un invariante di una quadrica è necessariamente della forma $\lambda\Delta^k$, essendo λ un numero.

Piú in generale si possono studiare i covarianti delle forme, che si passa a definire. Date le forme $f_j(x)$, un loro covariante è una forma $\psi(a, x)$ i cui coefficienti sono polinomi nei coefficienti delle f_j e con la proprietà che, operando una trasformazione proiettiva A sulle variabili e quindi sulle forme f_j, si ha $\psi(a', x')=\gamma(A)\psi(a, x)$, con $\gamma(A)$ dipendente solo da A (è facile vedere che $\gamma(A)$ è della forma $\det(A)^m$).

Esempi classici di covarianti sono la hessiana, che si è già considerata nel paragrafo precedente, e lo jacobiano di $n+1$ forme (in $x_0, x_1, \ldots, x_n$) definito dal determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

In casi speciali è possibile trovare tutti gli invarianti e covarianti. Nel caso binario (cioè per due variabili) sono stati calcolati con successo per le forme fino al grado 8. Per esempio per la cubica binaria $f(x_0, x_1)$ si ha il risultato di Cayley: il discriminante D, la hessiana H e lo jacobiano Q dei polinomi f e 2H generano tutti i covarianti di $f(x_0, x_1)$ e sono soggetti ad una relazione (sizigia di Cayley): $Q^2+Df^2+4H^3=0$.

Per calcolare i covarianti fu sviluppato, da Clebsch, Gordan, Aronhold, Sylvester, Cayley ed altri, il metodo simbolico. Tale metodo è strettamente legato a quello che in termini moderni viene chiamato «calcolo tensoriale». Lo si presenta nella sua veste originale. Siano date delle variabili vettoriali

$$\begin{aligned} x&=(x_0, x_1, \ldots, x_n) \\ y&=(y_0, y_1, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ z&=(z_0, z_1, \ldots, z_n). \end{aligned}$$

Una forma $\varphi(x, y, \ldots, z)$, di gradi n in x, m in $y, \ldots, p$ in z, è un polinomio nelle variabili $x_i, y_j, \ldots, z_k$ che abbia ogni monomio di grado complessivo n nelle x_i, m nelle $y_j, \ldots, p$ nelle z_k. Le forme di grado prescritto nelle $x, y, \ldots, z$ formano uno spazio vettoriale $P_{n,m,\ldots,p}$. Si sottopongano le variabili vettoriali ad una trasformazione lineare di matrice $A=(a_{ij})$; si scriva

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ ecc.}$$

e si ponga $f^A(x, y, \ldots, z)=f(A^{-1}x, A^{-1}y, \ldots, A^{-1}z)$ per ogni forma. Le forme considerate sono allora sottoposte ad una applicazione lineare indotta da A. In $P_{n,m,\ldots,p}$ si consideri l'insieme W delle forme del tipo $a(x)^n \cdot b(y)^m \cdot \ldots \cdot c(z)^p$ con $a(x), b(y), \ldots, c(z)$ lineari. Si ha: 1) W viene mutato in se stesso dalla A; 2) W genera linearmente lo spazio $P_{n,m,\ldots,p}$ (ovvero ogni forma è somma di forme appartenenti a W).

Il secondo punto del metodo simbolico è la polarizzazione, ovvero processo di Aronhold. Eccone un esempio tipico. Se $f(x)$ è una forma di grado m nella variabile vettoriale x e si sostituisce ad x una combinazione lineare $x=\Sigma\lambda_i y_i$ di variabili vettoriali $y_1, y_2, \ldots, y_m$, si ha, sviluppando rispetto alle potenze dei λ_i,

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i\right)=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=m}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_m^{i_m}f_{i_1\ldots i_m}(y_1, \ldots, y_m).$$

La $f_{i_1\ldots i_m}$ è omogenea di gradi $i_1, i_2, \ldots, i_m$ in $y_1, y_2, \ldots, y_m$ rispettivamente. In particolare $\bar{f}=f_{1,1,\ldots,1}$ è multilineare. Ponendo tutti gli y_i uguali a x e sfruttando l'omogeneità, si ha $(\Sigma\lambda_i)^m f(x)=\Sigma\,\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_m^{i_m}f_{i_1\ldots i_m}(x, x, \ldots, x)$; confrontando i coefficienti di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ si ha $f(x)=(1/m!)\,\bar{f}(x, x, \ldots, x)$. La forma f viene chiamata polarizzata completa di f. Piú in generale una forma in k variabili vettoriali si può polarizzare completamente rispetto a tutte le variabili. Se la forma iniziale è invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni, anche la polarizzata è tale. Dalle osservazioni fatte si deduce che, almeno in linea teorica, lo studio degli invarianti e covarianti si può ricondurre allo studio di quelli multilineari.

Date le forme $f=\Sigma a_{i_0\ldots i_n}x_0^{i_0}\ldots x_n^{i_n}$, $g=\Sigma b_{i_0\ldots i_n}x_0^{i_0}\ldots x_n^{i_n}, \ldots, k=\Sigma t_{i_0\ldots i_n}x_0^{i_0}\ldots x_n^{i_n}$ (di gradi $n, m, \ldots, p$ rispettivamente) e un loro invariante multilineare $\psi(a_{i_0\ldots i_n}, b_{i_0\ldots i_n}, \ldots, t_{i_0\ldots i_n})$, calcolando ψ sulle forme speciali $a(x)^n, b(x)^m, \ldots, c(x)^p$ $(a(x)=\Sigma a_i x_i, b(x)=\Sigma b_j x_j, \ldots, c(x)=\Sigma c_k x_k)$, si otterrà un invariante di gradi $n, m, \ldots, p$ nelle forme lineari $a=(a_0, \ldots, a_n)$, $b=(b_0, \ldots, b_n), \ldots$ Un tale invariante, per il teorema di Cayley, è un polinomio nei determinanti; viceversa ogni tale polinomio dà luogo ad un unico invariante delle forme date. Pertanto vi è un modo per generare tutti gli invarianti; è questo il punto di partenza del metodo simbolico. Per rendere effettivo tale metodo è necessario trovare le regole di moltiplicazione fra invarianti generati in questo modo. Un metodo effettivo fu sviluppato principalmente da Gordan, nel caso binario, per provare l'esistenza di un insieme finito di invarianti da cui tutti gli altri si generano (per somma e prodotto). Tale metodo è basato sullo sviluppo di Clebsch-Gordan di una forma binaria, sviluppo ripreso da Capelli nel caso generale. Si accenna ora brevemente a tale sviluppo: si studiano le forme in m variabili vettoriali $x_i=(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ e si pone

$$\Delta_{ij}=\sum_{s=0}^{n}x_{si}\frac{\partial}{\partial x_{sj}}.$$

Con tali operatori si costruisce il seguente determinante

$$H=\begin{vmatrix} \Delta_{11}+m-1 & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{m1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22}+m-2 & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{m2} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33}+m-3 & \cdots & \Delta_{m3} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \Delta_{1\,m-1} & \Delta_{2\,m-1} & \cdots & \Delta_{m-1\,m-1}+1 & \Delta_{m\,m-1} \\ \Delta_{1m} & \Delta_{2m} & \cdots & \cdots & \Delta_{mm} \end{vmatrix}$$

Le proprietà formali di tale operatore sono (identità di Capelli):

1) se $n<m$, $Hf=0$;

2) se $n=m$,

$$H=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \frac{\partial}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{21}} & \frac{\partial}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{nn}} \end{vmatrix}$$

3) se $n>m$,

$$H=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m}\begin{vmatrix} x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_{mi_1} & \cdots & x_{mi_m} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{1i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{mi_1}} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{\partial}{\partial x_{1i_m}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{mi_m}} \end{vmatrix}$$

Da tali proprietà formali Capelli dedusse i seguenti importanti teoremi di riduzione delle forme: 1) $f(x_1, \ldots, x_m)=\Sigma\Gamma_j f_j$, $f_j=\Phi_j f$ (dove Γ_j, Φ_j sono po-

linomi negli operatori Δ_{jk}, f_j dipende solo da $x_1, \ldots, x_n$); 2) piú precisamente si può assumere che f_j dipenda solo dai minori

$$\begin{vmatrix} x_{i_1 1} & \ldots & x_{i_k 1} \\ x_{i_1 2} & \ldots & x_{i_k 2} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_{i_1 k} & \ldots & x_{i_k k} \end{vmatrix}$$

Tale espansione fu usata con successo da Weyl, per il calcolo degli invarianti dei gruppi classici e inoltre fornisce un teorema generale (dovuto a Peano) di riduzione per gli invarianti. Tale espansione è strettamente legata alla teoria delle rappresentazioni del gruppo lineare e del gruppo simmetrico ed è stata la base dei lavori di Young su quest'ultimo argomento.

6. *La teoria di Hilbert.*

L'algebra della teoria degli invarianti, nel secolo scorso, si concentrava sui problemi seguenti:

a) Dato un sistema di forme, trovare un numero finito di invarianti da cui tutti gli altri si potessero dedurre (come polinomi).
b) Trovare le eventuali relazioni esistenti fra tali invarianti (per cercare eventualmente di eliminare invarianti sovrabbondanti) ovvero trovare forme canoniche per gli invarianti stessi.

Nel famoso lavoro *Über die Theorie der algebraischen Formen* (*Sulla teoria delle forme algebriche*) Hilbert risolse brillantemente questi problemi gettando le basi dell'algebra moderna. Si descrivono rapidamente le idee chiave in esso contenute che si esplicitano in alcuni famosi teoremi:

TEOREMA (*Basissatz*). *Dati comunque infiniti polinomi $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ in n variabili, è possibile fra essi sceglierne un numero finito, siano essi $f_1, \ldots, f_k$, in modo tale che ogni altro f_α sia esprimibile nella forma $f_\alpha = \sum_{i=1}^{k} g_i f_i$ (ovvero le equazioni $f_\alpha = 0$ sono conseguenze delle $f_i = 0$).*

TEOREMA (*Nullstellensatz*). *Sia $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$ un sistema di equazioni, ove f_i è un polinomio in $x_1, \ldots, x_n$. Se g è un polinomio in $x_1, \ldots, x_n$ che si annulla su tutte le soluzioni del sistema dato, allora per un k opportuno risulta $g^k = \Sigma h_i f_i$, con h_i polinomi.*

Prima di enunciare il teorema delle sizigie si introducono alcuni concetti preliminari. Dati k polinomi $f_1, \ldots, f_k$ in $x_1, \ldots, x_n$ si considerino le relazioni fra essi esistenti, cioè le espressioni del tipo $\Sigma h_i f_i = 0$ con h_i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$. Innanzitutto si prova che esiste un numero finito di relazioni da

cui le altre si deducono, ovvero esistono $(h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \ldots, h_k^{(j)})$, $j = 1, \ldots, s$ con $\Sigma h_i^{(j)} f_i = 0$ tali che, se $\Sigma h_i f_i = 0$ è una relazione, allora $h_i = \Sigma \lambda_j h_i^{(j)}$, con λ_j polinomi. Le relazioni fra tali relazioni sono ancora generate da un numero finito di relazioni. Si può quindi continuare induttivamente e calcolare le relazioni fra relazioni, ecc. Le relazioni al passo i-esimo si chiamano i-sizigie.

TEOREMA DELLE SIZIGIE. *Esiste una opportuna costruzione induttiva per le i-sizigie in modo tale che le $n+1$ sizigie sono banali (ossia le uniche relazioni fra le n-sizigie hanno tutti i coefficienti 0).*

Questo importante teorema ha avuto recentemente un utile complemento, congetturato da Serre e provato da Quillen e Suslin indipendentemente: comunque si generino le i-sizigie per $i = 1, \ldots, n-1$ si può trovare un sistema di generatori indipendenti per le n-sizigie (cioè le $n+1$ sizigie sono nulle).

I primi due teoremi enunciati furono usati da Hilbert per provare il seguente

TEOREMA. *Gli invarianti di un sistema arbitrario di forme sono sempre finitamente generati.*

Il teorema si riferisce al gruppo lineare operante su un sistema di forme e in caratteristica 0. Hilbert aveva in mente due possibili gradi di generalizzazione dei suoi risultati e li presentò sotto forma di problema, il quattordicesimo della famosa lista di ventitré da lui esposta al Convegno internazionale di matematica del 1900:

1) Dato un gruppo qualunque G di sostituzioni lineari su n variabili $x_1, \ldots, x_n$, esiste un numero finito di polinomi, invarianti rispetto a G, da cui tutti gli altri si possano generare?
2) (Versione originaria del quattordicesimo problema di Hilbert). Dati un anello di polinomi $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ e un campo E intermedio fra K e il campo delle funzioni razionali in $x_1, \ldots, x_n$, è vero che $A \cap E$ è finitamente generato su K?

Nel momento in cui Hilbert presentò questo problema sembrava che il caso 1) fosse stato risolto positivamente da Maurer, ma la dimostrazione di Maurer era sbagliata ed in effetti Nagata [1959] ha mostrato che il problema 1) (e quindi anche il 2)) ha in generale una risposta negativa (indipendentemente dalla caratteristica del campo base K). Si elencano ora i progressi compiuti in questo secolo nello studio del medesimo problema:

1) Hurwitz introduce la media sui gruppi di Lie compatti (che rimpiazza l'operatore Ω di Cayley).
2) Weyl mostra come il metodo di Hurwitz, insieme al cosiddetto trucco unitario, implica che le rappresentazioni dei gruppi semisemplici sono completamente riducibili in caratteristica 0. Come conseguenza il quattordicesimo problema di Hilbert ammette una soluzione positiva per tali gruppi.

3) Mumford congettura per i gruppi semisemplici in caratteristica p una forma debole della completa riducibilità delle rappresentazioni (gruppi geometricamente riduttivi) e Nagata mostra come da tale ipotesi segua una risposta affermativa al problema di Hilbert.
4) La congettura di Mumford è provata (Haboush, Formanek-Procesi).

La controparte geometrica della teoria algebrica esposta consiste nello studio dell'equivalenza degli oggetti, su cui opera il gruppo dato, tramite gli invarianti trovati. I teoremi principali sono dati ancora da Hilbert e generalizzati da Mumford. Ecco un'idea molto generale di questa teoria: sia G un gruppo riduttivo che opera su uno spazio vettoriale V; un vettore $v \in V$ si dice semistabile se esiste una forma omogenea f di grado > 0 su V invariante rispetto a G, con $f(v) \neq 0$. I vettori non semistabili vengono detti «forme nulle».

I punti principali sono:

1) I vettori semistabili V^{sst} sono un aperto di V, invariante rispetto al gruppo G.
2) L'anello degli invarianti è l'anello delle coordinate di una varietà algebrica W e la proiezione $\pi : V^{\mathrm{sst}} \to W$ è un quoziente, ovvero π è sopra e $U \subset W$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto.
3) Due punti $a, b \in V^{\mathrm{sst}}$ hanno gli stessi invarianti se e solo se le chiusure delle orbite di a e di b si intersecano, cioè $\overline{Ga} \cap \overline{Gb} \neq \emptyset$.
4) Un vettore v è una «forma nulla» se e solo se $0 \in \overline{Gb}$; in questo caso esiste un sottogruppo ad 1 parametro H di G tale che $0 \in \overline{Hb}$.

I teoremi ora enunciati hanno numerose applicazioni geometriche che qui non è possibile riportare [cfr. Mumford 1965].

7. *Le geometrie non-euclidee e il programma di Erlangen.*

Tornando a considerazioni piú elementari che sono state di importanza fondamentale per lo sviluppo della teoria dei gruppi di trasformazioni e dei loro invarianti, uno dei grandi successi della geometria all'inizio del secolo scorso fu la scoperta dell'indipendenza del quinto postulato di Euclide dagli altri postulati. Tale postulato afferma che, dati comunque una retta r e un punto P fuori di essa, è possibile tracciare (in modo unico) la parallela ad r per il punto P. La scoperta dell'indipendenza di tale postulato avvenne tramite la costruzione effettiva di geometrie non soddisfacenti ad esso, che sono dette geometrie non-euclidee; per esse si possono presentare vari fenomeni: per P può non passare alcuna parallela ad r oppure possono passarne infinite. Queste geometrie sono strettamente legate alla geometria proiettiva di cui si è parlato nel § 4; le si descrive qui dal punto di vista di Klein [1871].

La teoria di Klein si basa sulle considerazioni seguenti: data una conica $\mathcal{C}$ non degenere del piano proiettivo reale si considera il gruppo G delle proiettività che la lasciano invariante. Se $\mathcal{C}$ è puramente immaginaria (geometria ellittica) si indica con X il piano proiettivo reale; se $\mathcal{C}$ è reale (geometria iperbolica) essa divide il piano in due parti: si indica con X una delle due e si restringe G al sottogruppo che muta X in se stesso. Il gruppo G opera transitivamente sui punti e sulle rette di X. Inoltre su X si può dare una nozione di distanza fra i punti che risulta invariante rispetto alle trasformazioni di G. Esplicitamente, dati due punti $P, Q \in X$ si consideri la retta r tracciata per essi e siano M, N i due punti segati da r sulla conica $\mathcal{C}$. Il birapporto $(PQMN)$ dei quattro punti P, Q, M, N è chiaramente un invariante, rispetto al gruppo G, della coppia PQ. Per ottenere una nozione di distanza basta prendere come definizione $\overline{PQ} = k \log(PQMN)$, essendo k una costante positiva se $\mathcal{C}$ è reale, e immaginaria per $\mathcal{C}$ immaginaria. Analogamente l'angolo fra due rette r ed s si può ottenere dal birapporto fra le due rette e le due tangenti a $\mathcal{C}$ tracciate dal punto d'intersezione di r ed s. La subordinazione delle geometrie non-euclidee alla geometria proiettiva è valida anche nel caso della geometria euclidea; in questo caso si tratta di lasciare fissa la retta all'infinito e su di essa i due punti ciclici $(1, i, 0)$, $(i, 1, 0)$. In tutti i casi vi è un ente da lasciare fisso per ottenere il gruppo dei movimenti della geometria (tale ente è detto «assoluto» (Cayley)).

Questo approccio alle geometrie, tramite lo studio del gruppo delle trasformazioni compatibili con i dati, portò Klein a formulare un programma generale (relativo allo studio delle geometrie) nel lavoro *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [1872]. Tale programma è noto sotto il nome di programma di Erlangen e può cosí essere riassunto: il dato iniziale di una geometria è un gruppo G operante su un insieme X e lo studio della geometria consiste nell'analisi delle proprietà delle «configurazioni» in X, invarianti rispetto a G. In pratica G viene sempre ottenuto come il gruppo delle trasformazioni di X che fissano una qualche configurazione data a priori: «un assoluto». Naturalmente in questa generalità il programma è eccessivamente astratto e impreciso. Scendendo a condizioni piú precise su G e su X si ottengono importanti teorie matematiche:

1) la teoria dei gruppi continui, dei gruppi di Lie e degli spazi simmetrici;
2) la teoria dei gruppi finiti e le geometrie combinatorie;
3) la teoria dei gruppi algebrici e delle varietà abeliane;
4) la teoria delle funzioni automorfe e dei gruppi aritmetici.

Prima di parlare del contenuto di tali teorie è opportuno discutere altri sviluppi, di natura puramente algebrica, fondamentali per comprendere piú compiutamente gli altri aspetti che si presentano nelle teorie medesime. Essi verranno trattati nel prossimo paragrafo.

8. *L'algebra non-commutativa nell'Ottocento.*

Si discute ora il contributo di tre algebristi del secolo scorso: Hamilton, Grassmann e Clifford.

La scoperta dei quaternioni da parte di Hamilton ebbe per l'algebra lo stesso impatto della scoperta delle geometrie non-euclidee in geometria. Hamilton

scoprí che è possibile costruire dei numeri nei quali valgono formalmente le proprietà usuali dei numeri reali eccetto la proprietà commutativa del prodotto (un tale oggetto algebrico è detto corpo numerico). Tali numeri, chiamati da Hamilton quaternioni, per una ragione che apparirà subito evidente, si possono scrivere formalmente nel modo seguente: $a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dove a_0, a_1, a_2, a_3 sono quattro numeri reali arbitrari, i, j, k sono simboli soggetti alle regole del calcolo $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ki = j$, $jk = i$, $ji = -k$, $ik = -j$, $kj = -i$. È facile verificare che i quaternioni soddisfano le usuali proprietà; per quanto riguarda la divisione si osserva che $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ da cui si deduce facilmente la regola per la divisione. Dato un quaternione $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ si pone $\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ e si verifica che $\bar{\bar{q}} = q$, $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$ e $q\bar{q} = N(q) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ è un numero reale (detto norma).

Un'importante applicazione di questo calcolo si ha considerando l'insieme A dei quaternioni tali che $a_0 = 0$. A può essere geometricamente pensato come lo spazio a tre dimensioni, con l'usuale distanza data da $\sqrt{N(q_1 - q_2)}$. I quaternioni q con norma 1 si possono pensare come una sfera a tre dimensioni. Se $p \in A$, $N(q) = 1$, si ha $qpq^{-1} \in A$; q induce in tal modo una trasformazione ortogonale nello spazio A a tre dimensioni. Si mostra allora che ogni trasformazione ortogonale che mantenga l'orientazione dello spazio è ottenibile in tale modo esattamente da due quaternioni.

Il contributo di Grassmann è molto importante; egli ha dato un metodo che si è mostrato fruttuoso per effettuare, con i sottospazi di uno spazio vettoriale V su K, calcoli di natura algebrica e geometrica. L'idea algebrica di Grassmann è semplicissima; si provi a definire un prodotto fra le coppie v, w di vettori di V indicato con $v \wedge w$ (prodotto che non sarà piú in V), con la regola che se due vettori sono dipendenti, il loro prodotto è 0 (tale calcolo per $n = 3$ era già noto ma era considerato un prodotto interno allo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$). La regola dà subito per $v \in V$, $v \wedge v = 0$; da cui $0 = (v + w) \wedge (v + w) = v \wedge w + w \wedge v$ ovvero $v \wedge w = -w \wedge v$. Se si calcola con questa regola, usando una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, il prodotto $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$, con $v_1 = a_{11} e_1 + \ldots + a_{1n} e_n, \ldots, v_k = a_{k1} e_1 + \ldots + a_{kn} e_n$, si ottiene $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (i_1 i_2 \ldots i_k)\, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ dove $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, detta coordinata plückeriana, denota il determinante formato con le colonne $i_1, i_2, \ldots, i_k$ nella matrice $k \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'algebra generata da V in tale modo ha come base gli elementi $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ con $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. La parte generata dai prodotti di k vettori viene denotata con $\Lambda^k V$ e si chiama potenza esterna k-esima di V.

La possibilità di svolgere effettivamente questo calcolo simbolico permette di sviluppare in maniera estremamente elegante le regole del calcolo con le matrici e di spiegare la natura intrinseca di fenomeni che si presentano al ri-

guardo. Inoltre esso dà gli strumenti algebrici per trattare il calcolo dei sottospazi. In particolare se si cerca di studiare l'insieme dei sottospazi di dimensione k di V si osserva che, generando un tale spazio con k vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$, il «vettore» $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ è determinato dal sottospazio a meno di uno scalare non nullo e pertanto tale k-spazio corrisponde a un punto dello spazio proiettivo $\mathbf{P}(\Lambda^k V)$ dello spazio vettoriale $\Lambda^k V$.

L'insieme dei k-spazi di V viene pertanto a corrispondere ad un sottoinsieme di $\mathbf{P}(\Lambda^k V)$. Esso è in realtà una varietà algebrica, ovvero è il luogo degli zeri di certi polinomi quadratici che si possono scrivere esplicitamente. Questa teoria è strettamente legata al teorema fondamentale della teoria degli invarianti di Cayley (cfr. § 5) in quanto le coordinate plückeriane si possono interpretare come invarianti di n vettori a k coordinate rispetto a $\mathrm{Sl}(k, K)$.

Il calcolo di Clifford è una sintesi delle idee di Hamilton e Grassmann. Dato uno spazio V con una forma quadratica $Q(v)$ (scritta per esempio in una base $Q(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma a_i x_i^2$), si costruisce da V un'algebra con la regola fondamentale di calcolo $v^2 = Q(v)$. In questo modo si dimostra che si ottiene un'algebra che ha come base i monomi $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, se $(e_1, \ldots, e_n)$ è una base di V. Se $Q \equiv 0$ si ritrova l'algebra di Grassmann; ma, ad esempio, se $Q(x_1, \ldots, x_n) = -\Sigma x_i^2$ si trovano generalizzazioni dell'algebra dei quaternioni, la quale coincide con l'algebra di Clifford nel caso $n = 2$.

Il calcolo di Clifford si è mostrato particolarmente fruttuoso: esso ha dato origine alla nozione di gruppo spinoriale che ha avuto un'interessante interpretazione in meccanica quantistica. L'idea della costruzione risiede nel fatto che l'algebra di Clifford possiede un gruppo di automorfismi, generato dal gruppo ortogonale della forma quadratica; tali automorfismi sono dati coniugando l'algebra di Clifford tramite elementi che generano appunto il gruppo spinoriale. (Si confronti la discussione nel caso dei quaternioni).

Completa questa breve rassegna la menzione di un teorema di Frobenius che è un importante complemento alla teoria di Hamilton:

TEOREMA. *Gli unici corpi numerici che si possono costruire su uno spazio di n-uple di numeri reali sono i reali, i complessi e i quaternioni.*

9. *I gruppi continui.*

Nello studio della geometria proiettiva e negli sviluppi del programma di Erlangen l'attenzione dei matematici del secolo scorso era focalizzata su alcuni modelli geometrici aventi gruppi particolari di trasformazioni. Verso la fine del secolo però, sotto l'influenza di Lie, Engel, Killing, Cartan ed altri, il punto di vista si è sviluppato in una teoria generale che pone al centro delle proprie ricerche una classificazione, in un certo senso, di tutti i possibili gruppi e di tutte le possibili geometrie. Uno degli aspetti piú fruttuosi è stato lo studio dei gruppi

dipendenti da parametri continui e piú in generale, come conseguenza dello sviluppo della topologia, quello dei gruppi topologici.

Se G è un gruppo topologico si cerca, prima di tutto, di vedere se è possibile fare la media su G di una funzione su esso definita. Nel caso in cui G sia localmente compatto la risposta a tale quesito è positiva. Infatti esiste su G una misura di Borel invariante rispetto alla moltiplicazione a destra fatta con elementi del gruppo. Tale misura è unica a meno di un fattore costante (misura di Haar). In particolare se G è compatto e opera con continuità su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbf{C}$, si può operare la media su G di una forma hermitiana su V e pertanto trovare una metrica hermitiana su V invariante rispetto a G. Da ciò si deduce che G è un gruppo di trasformazioni unitarie su V.

Questo fatto ha un'importante implicazione: se $W \subset V$ è un sottospazio di V, invariante rispetto al gruppo G, e $W^{\perp}$ è l'ortogonale a W rispetto alla forma hermitiana invariante, si ha la decomposizione $V = W + W^{\perp}$, $0 = W \cap W^{\perp}$ e $W^{\perp}$ è esso stesso G-invariante. Da questo segue che lo spazio V si decompone come somma di sottospazi G-invarianti ed irriducibili (ovvero privi di sottospazi propri G-invarianti). In particolare questi risultati si possono applicare nel caso di un gruppo finito G con n elementi (in questo caso si pensa in G la topologia discreta, e la misura di massa $1/n$ in ogni elemento di G).

Lo studio degli spazi su cui G opera, ovvero delle rappresentazioni di G, è particolarmente facilitato dalla teoria dei caratteri, sviluppata da Frobenius-Schur per i gruppi finiti ed estesa da Peter-Weyl per i gruppi compatti. Se G opera su uno spazio V e $g \in G$, g induce una trasformazione lineare su V la cui traccia $\chi(g)$ viene detta carattere della rappresentazione. Se G è compatto, con una misura di Haar μ di volume 1, si ha, integrando sul gruppo G, $\int_G \chi_1(g)\bar{\chi}_1(g) = 1$ e $\int_G \chi_1(g)\bar{\chi}_2(g) = 0$ se $\chi_1 \neq \chi_2$, ove χ_1 e χ_2 sono caratteri di rappresentazioni irriducibili. Questa legge fondamentale di ortogonalità dei caratteri permette di sviluppare l'analisi armonica sul gruppo compatto G, analoga all'analisi di Fourier per le funzioni periodiche. Infatti l'analisi di Fourier classica è relativa al gruppo moltiplicativo $T = \{\alpha \in \mathbf{C} \mid |\alpha| = 1\}$. Per tale gruppo le rappresentazioni irriducibili sono tutte 1-dimensionali e del tipo $\alpha \to \alpha^m$, essendo m un intero prefissato. L'ortogonalità fra i caratteri si riduce in questo caso alla nota legge $\int_0^{2\pi} e^{ni\vartheta} \cdot e^{-mi\vartheta}\, d\vartheta = 0$ se $n \neq m$.

La seconda proprietà dei caratteri è la completezza; essa discende dalla struttura algebrica dell'analisi di Fourier su G che può essere cosí descritta: sia $C(X)$ l'algebra delle funzioni continue su G; su $C(X)$ si può mettere una nuova moltiplicazione, la convoluzione data da $(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y)\, dy$. Rispetto a tale moltiplicazione, gli ideali minimi dell'algebra $C(X)$ sono isomorfi ad algebre complete di matrici $(\mathbf{C})_{n_i}$ e corrispondono a rappresentazioni irriducibili del gruppo G. Infatti ogni rappresentazione irriducibile di G appare in $C(X)$ tante volte quanta è la sua dimensione e la somma di tutte le rappresentazioni irriducibili isomorfe è un tipico ideale minimale. Inoltre la somma diretta di tutti questi ideali $(\mathbf{C})_{n_i}$ è densa in $C(X)$ rispetto a varie topologie naturali. In particolare se G è un gruppo finito, l'algebra di convoluzione

$\mathbf{C}[G]$ di G si scrive in modo semplice. I suoi elementi sono della forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ ($\alpha_i \in \mathbf{C}$, $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$). Il prodotto si fa usando la legge di prodotto interna a G. La teoria precedente implica che $\mathbf{C}[G] \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathbf{C})_{n_i}$, ove k è il numero delle rappresentazioni irriducibili di G di dimensioni $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Questo teorema ha un'importante generalizzazione, dovuta a Wedderburn. Sia A un'algebra associativa e di dimensione finita su un campo F. Si suppone che in A non esistono elementi $a \neq 0$ tali che $axa = 0$ per ogni $x \in A$. In tali ipotesi A è isomorfa alla somma diretta di algebre S_i, dove $S_i \simeq (D_i)_{n_i}$ è l'algebra delle matrici $n_i \times n_i$ su un corpo D_i (non necessariamente commutativo).

Ritornando alla teoria generale, se G è un gruppo localmente compatto e commutativo, l'insieme $\hat{G}$ delle sue rappresentazioni unitarie 1-dimensionali assume in modo naturale una struttura di gruppo localmente compatto e si ha in tal modo un'antiequivalenza all'interno dei gruppi localmente compatti, detta dualità di Pontrjagin. In particolare: 1) $G = \hat{\hat{G}}$; 2) G è compatto se e solo se $\hat{G}$ è discreto; 3) esiste una misura di Haar μ su G e una misura $\hat{\mu}$ su $\hat{G}$ in modo tale che $\int_{\hat{G}} \hat{f}\, d\hat{\mu} = \int_G f\, d\mu$, dove, se $\varphi \in \hat{G}$, $\hat{f}(\varphi) = \int_G f\varphi\, d\mu$ è la trasformata di Fourier generalizzata; 4) se $H \subset G$ è un sottogruppo discreto e G/H è compatto allora $(\widehat{G/H}) \subset \hat{G}$ è discreto e $\hat{G}/(\widehat{G/H}) = \hat{H}$ è compatto. Vale inoltre la formula di somma di Poisson

$$\sum_{h \in H} f(h) = \sum_{k \in (\widehat{G/H})} \hat{f}(k)$$

ove f è una funzione definita su G e soddisfacente opportune ipotesi.

Uno dei casi piú interessanti nella teoria dei gruppi continui è la teoria dei gruppi continui dipendenti da un numero finito di parametri reali. Fu congetturato da Hilbert (quinto problema della famosa lista) e provato da Gleason e altri che ogni tale gruppo può essere reso analitico, cioè su un tale gruppo G esiste una struttura di varietà analitica tale che le operazioni gruppali di prodotto e inverso sono analitiche.

La teoria di tali gruppi, detti gruppi di Lie, fu iniziata da Sophus Lie e Killing alla fine del secolo scorso. Fu portata poi a grande sviluppo da Cartan e Weyl all'inizio di questo secolo e piú recentemente da Chevalley, Harish-Chandra e numerosi altri autori. La teoria di Lie è basata su un potente metodo infinitesimale, cioè la teoria delle algebre di Lie.

Si accenna ai punti essenziali di tale metodo. Prima di tutto si ricorda che, se su una varietà M si ha una famiglia ad un parametro di movimenti $x' = \psi(t, x)$, ogni punto $x \in M$ percorre, al variare di t, una curva. Quest'ultima ha, per $t = 0$, un vettore tangente che descrive a livello infinitesimale il movimento. Un tale dato, cioè l'assegnazione di un vettore tangente a x per ogni $x \in M$, è noto come campo vettoriale su M (se M è compatta tale dato si può sempre integrare e corrisponde effettivamente a dare la velocità in 0 di un movimento effettivo $\psi(t, x)$). Se G è un gruppo di Lie, esso opera come gruppo continuo di movimenti su se stesso (per moltiplicazione, per esempio a destra); i campi di vet-

tori velocità associati a questi movimenti sono esattamente quelli invarianti a destra rispetto alla moltiplicazione per elementi di G. Dare un campo vettoriale invariante vuol dire, sostanzialmente, dare la velocità solo nel punto $1 \in G$ e trasportarla poi a tutto G per invarianza. Pertanto i campi vettoriali invarianti formano uno spazio vettoriale di dimensione uguale alla dimensione di G. I campi vettoriali posseggono inoltre una operazione di moltiplicazione, detta parentesi di Poisson, scritta $[X, Y]$; se si pensa ai campi vettoriali come operatori differenziali in effetti $[X, Y] = XY - YX$. Tale composizione riflette l'eventuale non-commutatività dei movimenti effettivi associati ai campi vettoriali. In particolare i campi invarianti sono chiusi rispetto a questa operazione e formano pertanto un'algebra non associativa G di dimensione n, la cui struttura algebrica soddisfa le seguenti proprietà:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticommutatività);
2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identità di Jacobi).

Un'algebra soddisfacente tali proprietà viene chiamata algebra di Lie. L'idea fondamentale è che l'algebra di Lie associata a G contiene gran parte dell'informazione data da G o meglio dalla componente connessa G^0 di 1 in G. Questo principio non è altro che una forma raffinata del metodo basilare di traduzione infinitesimale e differenziale dei problemi di movimento o evoluzione (ovvero di sistemi meccanici). La sua esplicitazione porta ai teoremi seguenti:

1) Se G, H sono gruppi di Lie, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ le rispettive algebre di Lie e $\varphi : G \to H$ un omomorfismo, allora φ induce un omomorfismo $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ di algebre di Lie.
2) Ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (di dimensione finita) è associata ad un unico gruppo di Lie G connesso e semplicemente connesso. Ogni altro gruppo di Lie connesso G' associato a $\mathfrak{g}$ è della forma G/H dove H è un sottogruppo discreto nel centro di G (H è isomorfo a $\pi_1(G')$).
3) Se G, H, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sono come sopra e G, H sono semplicemente connessi, ogni omomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è il differenziale $d\varphi$ di un unico omomorfismo $\varphi : G \to H$ di gruppi di Lie.

L'analisi successiva dei gruppi (ovvero delle algebre) di Lie comporta l'introduzione della nozione di risolubilità e semisemplicità. La definizione di gruppo risolubile è stata già data nella discussione della teoria di Galois (cfr. § 1). Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice risolubile se esistono sottospazi $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = 0$ tali che $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. Si può mostrare inoltre che G è risolubile se e solo se $\mathfrak{g}$ lo è.

In generale, dato un gruppo di Lie G, esiste un sottogruppo normale H risolubile e massimale rispetto a tale proprietà; tale sottogruppo viene chiamato radicale di G e G si dice semisemplice se $H = 1$. Si ha una nozione analoga per le algebre di Lie in cui un sottogruppo normale è sostituito da un ideale $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ (ovvero un sottospazio per cui $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$).

Lo studio della semisemplicità è basato su un metodo invariantivo fondamentale dovuto a Killing e a Cartan. Se $x \in \mathfrak{g}$ (un'algebra di Lie), sia adx

la trasformazione lineare di $\mathfrak{g}$ data da $adx : y \to [x, y]$. Dati poi $x, y \in \mathfrak{g}$ si definisce $(x, y) = \mathrm{Tr}(adx \cdot ady)$. In questo modo si viene a costruire una forma bilineare canonica su $\mathfrak{g}$, detta forma di Killing. Essa contiene le seguenti informazioni: 1) $\mathfrak{g}$ è risolubile se e solo se la forma di Killing è nulla; 2) $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se la forma di Killing è non degenere.

La teoria di Cartan si basa su 1) e 2) per arrivare alla classificazione completa delle algebre di Lie semisemplici sui complessi e sui reali. Si accenna brevemente alle idee principali di tale classificazione: se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semisemplice complessa e $x \in \mathfrak{g}$ è un elemento scelto in modo abbastanza ge

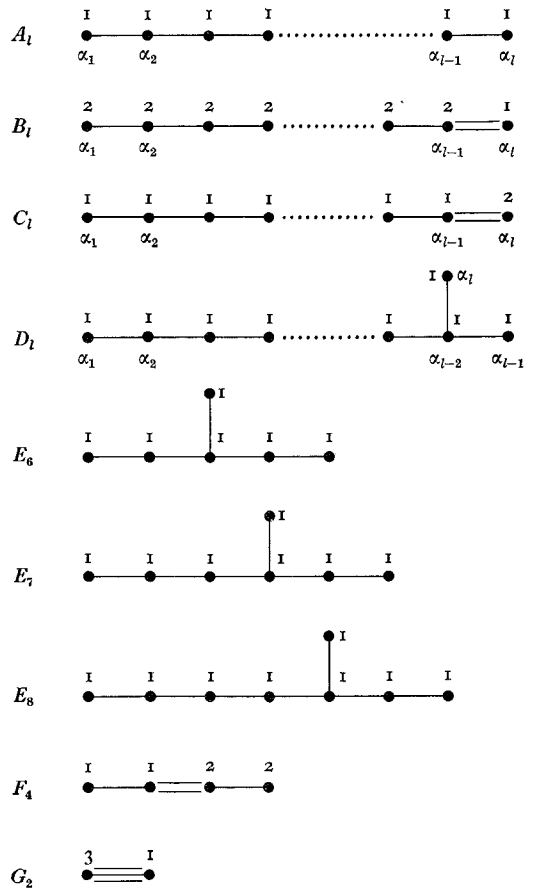


Figura 5.
Diagrammi di Dynkin per classificare le algebre di Lie semplici.

nerale, lo spazio $\mathfrak{h}=\{y\in\mathfrak{g};\ [x,y]=0\}$ è una sottoalgebra di Lie a moltiplicazione nulla, detta algebra di Cartan di $\mathfrak{g}$. Per essa si ha:

1) la forma di Killing su $\mathfrak{h}$ è non degenere;
2) vi è un numero finito di forme lineari su $\mathfrak{h}$: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, dette radici di $\mathfrak{g}$, e un numero finito di vettori non nulli $x_1, \ldots, x_k$ tali che $ad(h)x_i=\alpha_i(h)x_i$ per ogni i e ogni $h\in\mathfrak{h}$;
3) le radici generano il duale $\mathfrak{h}^*$ di $\mathfrak{h}$ sui reali.

Scelta una $\mathbf{R}$-base $\beta_1, \ldots, \beta_p$ di $\mathfrak{h}^*$ fra le radici, si può dare una nozione di positività per gli elementi di $\mathfrak{h}$, un elemento di coordinate $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ essendo positivo se e solo se la prima coordinata non nulla è positiva. A tale nozione si può associare quella di radice semplice, ovvero una radice che non si possa spezzare come somma di radici positive. Si ottiene allora che le radici semplici $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sono una base di $\mathfrak{h}^*$ e, usando la forma di Killing su $\mathfrak{h}^*$ (che è isomorfo ad $\mathfrak{h}$ tramite la forma di Killing stessa) si definiscono i numeri $A_{ij}=2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)$. Gli A_{ij} sono interi: $A_{ii}=2$ e se $i\neq j$ si ha o $A_{ij}=0=A_{ji}$, oppure dei due numeri A_{ij} e A_{ji} uno è -1 e l'altro è -1, -2 o -3.

4) Si mostra che la matrice dei numeri A_{ij}, detta matrice di Cartan, determina completamente l'algebra di Lie.

Infine, per classificare le algebre di Lie semplici (quelle senza ideali) si costruisce un diagramma classificante (diagramma di Dynkin). Il procedimento è il seguente: si disegnano p punti, corrispondenti alle radici semplici $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$; si unisce α_i e α_j con $A_{ij}A_{ji}$ linee e si attribuisce al punto α_i il peso (α_i, α_i). Si vede cosí che, pur di normalizzare i pesi, i diagrammi di Dynkin connessi (i quali corrispondono alle algebre di Lie semplici), sono dati dalla classificazione riportata in figura 5.

Nei primi quattro casi l è un intero variabile da 1 a infinito e le quattro classi infinite corrispondenti sono associate ai gruppi «classici» ovvero:

A_l	$\mathrm{Sl}(l+1, \mathbf{C})$	il gruppo speciale lineare delle matrici $(l+1)\times(l+1)$ con determinante 1.
B_l	$\mathrm{SO}(2l+1, \mathbf{C})$	il gruppo speciale ortogonale delle matrici ortogonali $(2l+1)\times(2l+1)$ a determinante 1 (ovvero che lasciano invariata una forma simmetrica).
C_l	$\mathrm{Sp}(2l, \mathbf{C})$	il gruppo simplettico delle matrici che lasciano invariata una forma antisimmetrica.
D_l	$\mathrm{SO}(2l, \mathbf{C})$	il gruppo speciale ortogonale delle matrici ortogonali $2l\times 2l$ a determinante 1.

Le rimanenti cinque algebre, dette algebre eccezionali, possono essere costruite considerando delle strutture algebriche piú complesse (numeri di Cayley, algebre di Jordan eccezionali). Dei quattro tipi di gruppi infiniti il tipo $\mathrm{SO}(2l+1, \mathbf{C})$ non è semplicemente connesso. I gruppi semplicemente connessi ad esso associati sono costruibili a partire dalle algebre di Clifford.

Vi sono due importanti passi successivi nella teoria di Cartan, comportanti

un grande contributo al programma di Erlangen. Il primo è costituito dalla determinazione di tutte le algebre di Lie semplici sui numeri reali e pertanto l'analoga classificazione dei gruppi. Tale teoria è basata sul fatto che un'algebra $\mathfrak{g}$ semisemplice reale resta tale se complessificata (ovvero $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ è semisemplice). Ne segue che per la classificazione basta ricercare, per ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}'$ semisemplice complessa (quindi data dalla classificazione precedente), tutte le algebre reali $\mathfrak{g}$ che dànno $\mathfrak{g}'$ per complessificazione. Tale ricerca è in effetti possibile e dà luogo ad una classificazione completa. Per esempio per il gruppo $\mathrm{SO}(m, \mathbf{C})$ si ottengono come forme reali i gruppi ortogonali relativi alle forme quadratiche sui reali $\sum_{i=1}^{k} x_i^2-\sum_{i=k+1}^{m} x_i^2$. Per $m=4$, $k=3$ si ha il gruppo speciale di Lorentz che è a fondamento della meccanica relativistica.

Un importante complemento, dovuto a Weyl, è dato dall'osservazione che, fra tutte le algebre di Lie reali $\mathfrak{g}$ aventi una data $\mathfrak{g}'$ come complessificata ve ne è una, *unica*, il cui gruppo di Lie reale associato è compatto. Questa è la base del cosiddetto «trucco unitario» di Weyl. Per esempio, la forma compatta di $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{C})$ è $\mathrm{SU}(n, \mathbf{C})$, ovvero il gruppo speciale unitario delle matrici a determinante 1 che lasciano fissa la forma hermitiana $\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_i$.

Il secondo grande contributo di Cartan è la risoluzione del problema della classificazione degli spazi simmetrici. Uno spazio simmetrico è una varietà connessa X con una nozione di distanza fra i punti e tale che: 1) le trasformazioni su X che lasciano la distanza invariante (isometrie) operano transitivamente sui punti; 2) dato comunque un punto $p\in X$ esiste un'unica «simmetria» di X rispetto a p, cioè un'isometria $\pi : X\to X$ che fissa p e scambia ogni direzione uscente da p con l'opposta.

La definizione data include le strutture geometriche note e la classificazione di tali spazi è, in questo senso, la classificazione di un'ampia classe di geometrie. La classificazione fornisce pertanto uno dei maggiori contributi al programma di Erlangen.

Uno spazio simmetrico si ottiene, a meno di fattori del tipo spazio euclideo o circonferenze, come quoziente di un gruppo di Lie semisemplice G modulo un sottogruppo compatto H, ottenuto dall'insieme dei punti fissi per un automorfismo $\vartheta : G\to G$ di ordine 2. Pertanto la classificazione degli spazi simmetrici si ottiene dalla classificazione dei gruppi di Lie e dei loro automorfismi. Ad esempio si consideri il gruppo $\mathrm{SO}(n, \mathbf{R})$ e l'automorfismo ϑ dato dalla coniugazione con la matrice

$$\begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & -I_{n-h} \end{pmatrix}$$

ove I_h è la matrice unità $h\times h$. Si prova facilmente che se si denota con H il sottogruppo fissato da ϑ, lo spazio simmetrico $\mathrm{SO}(n, \mathbf{R})/H$ si può identificare alla grassmanniana degli h-piani di $\mathbf{R}^n$.

Un altro importante esempio [cfr. Siegel 1964] è dato dalla geometria simplettica, la quale fornisce l'analogo multidimensionale del modello di Klein-

Poincaré della geometria iperbolica. Si considerano le matrici $n \times n$ della forma $M = A + iB$ (A, B matrici reali), tali che $M^t = M$ e B è simmetrica positiva. Su questo spazio di matrici opera un gruppo, associato al gruppo simplettico, dato dalle trasformazioni del tipo:

$$M \to \frac{UM+V}{TM+W} \qquad \text{con} \begin{pmatrix} U & V \\ T & W \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}).$$

Sul medesimo spazio di matrici è possibile dare una metrica in modo che il gruppo considerato sia il gruppo delle isometrie.

Una ulteriore direzione di studio di geometria, nel senso di Klein, viene direttamente dai lavori di Weyl sui gruppi di Lie compatti, nei quali si riconosce l'importanza del gruppo W (gruppo di Weyl) generato dalle riflessioni dello spazio euclideo $\mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}$ algebra di Cartan di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ semisemplice) rispetto agli iperpiani associati alle radici. W è un gruppo finito che può essere descritto in vari modi; ad esempio $W = N/T$, ove T è un toro massimale del gruppo compatto associato a $\mathfrak{g}$ ed N il suo normalizzatore. Lo studio dei gruppi generati da riflessioni fu sviluppato da Coxeter e si ricongiunge ad un altro filone algebrico-geometrico che può, a pieno diritto, considerarsi parte del programma di Erlangen. Si tratta dello studio dei poliedri regolari e della decomposizione dello spazio secondo «pavimentazioni regolari» [per maggiori ragguagli storici e bibliografici confrontare Bourbaki 1971, capp. IV, V, VI]. Coxeter determinò tutti i gruppi finiti generati da riflessioni e fra essi i gruppi cristallografici; la teoria è simile a quella dei gruppi di Lie, ma oltre ai gruppi di Weyl compaiono altri esempi. Ci si limita qui a citare un notevole teorema di Chevalley sugli invarianti di tali gruppi:

TEOREMA. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n sui reali e G è un gruppo finito di trasformazioni ortogonali di V generato da riflessioni, allora l'anello dei polinomi su V invarianti rispetto a G è esso stesso un anello di polinomi in n variabili indipendenti.*

Questo teorema, che può pensarsi come una generalizzazione del teorema sulla generazione delle funzioni simmetriche (cfr. § 1), ha interessanti conseguenze per la teoria delle rappresentazioni dei gruppi di Lie.

10. *Gruppi algebrici.*

Come conseguenza della teoria dei gruppi di Lie si ha che se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semplice sui complessi ad essa corrisponde un gruppo semplice G, detto gruppo aggiunto, che può essere descritto come il gruppo degli automorfismi di $\mathfrak{g}$. Esso è il sottogruppo del gruppo $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ delle trasformazioni lineari di $\mathfrak{g}$ che preservano la moltiplicazione; è quindi evidente che G è in $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ il luogo degli zeri di un sistema di equazioni algebriche. Motivati da questo, e da altri esempi che si vedranno in seguito, è possibile studiare i gruppi di tale natura, cioè sottogruppi di $\mathrm{Gl}(n, K)$ (essendo K un campo arbitrario) definiti da equazioni algebriche. L'importanza di tali gruppi è duplice: da una parte essi sono legati alla geometria algebrica su un campo qualunque; dall'altra, scegliendo per K un campo finito, permettono di ottenere classi di gruppi semplici finiti. Lo studio di gruppi finiti che provengono da gruppi classici, cioè le classi A_e, B_e, C_e, D_e, risale a Galois, Jordan, e piú sistematicamente a Dickson (che studiò anche G_2), Dieudonné, Artin.

Si riassumono rapidamente i punti piú significativi degli sviluppi piú recenti di tale teoria: 1) Chevalley mostra che le algebre di Lie semplici su $\mathbf{C}$ posseggono un'opportuna base, con legge di moltiplicazione a coefficienti interi, che permette di definire i gruppi «di tipo Lie» anche su anelli commutativi qualunque, in particolare su campi finiti. Tramite tale costruzione si ottengono nuove classi di gruppi semplici finiti (corrispondenti ai tipi eccezionali di algebre di Lie). 2) Borel mostra l'importanza dei sottogruppi connessi risolubili massimali (sottogruppi di Borel) per la teoria di struttura dei gruppi algebrici. 3) La classificazione dei gruppi semisemplici in ogni caratteristica risulta analoga a quella nel caso complesso (Chevalley). 4) Bruhat trova un'importante decomposizione per un gruppo di Lie semplice G; risulta $G = \bigcup_w BwB$, ove B è un sottogruppo di Borel e w varia fra i rappresentanti del gruppo di Weyl del toro massimale contenuto in B. 5) La decomposizione di Bruhat, le cui proprietà sono state assiomatizzate da Tits con la teoria delle BN-coppie, ha importanti conseguenze. Fra esse la dimostrazione della semplicità di tali gruppi e la classificazione dei gruppi parabolici, cioè quei sottogruppi P tali che G/P sia una varietà proiettiva.

11. *I gruppi classici.*

Si accenna ora a una teoria che è un logico sviluppo della teoria degli invarianti del secolo scorso, cioè la teoria della decomposizione degli spazi tensoriali rispetto ai gruppi classici. La teoria si può sviluppare a partire dalle seguenti osservazioni: se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $V^{\otimes m}$ è la potenza tensoriale m-esima, il gruppo lineare di V ed il gruppo S_m delle permutazioni su m elementi operano su $V^{\otimes m}$ secondo le regole:

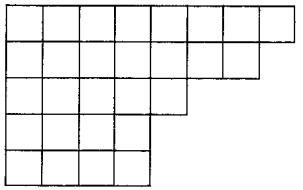
$$1)\ g(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m) = g(v_1) \otimes g(v_2) \otimes \ldots \otimes g(v_m) \qquad g \in \mathrm{Gl}(V)$$
$$2)\ \sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)} \qquad \sigma \in S_m.$$

I due gruppi $\mathrm{Gl}(V)$, S_m generano due algebre di operatori su $V^{\otimes m}$ indicate rispettivamente con U_m e Σ_m. Si ha il seguente risultato, dovuto inizialmente a Shur in caratteristica 0 e a De Concini e Procesi in generale:

TEOREMA. *Σ_m è l'algebra di tutti gli operatori che commutano con gli elementi di U_m e viceversa.*

Nel caso che V sia uno spazio vettoriale su di un campo F di caratteristica 0, questo teorema permette di studiare la decomposizione dello spazio $V^{\otimes m}$ ri-

spetto ai due gruppi $\mathrm{Gl}(V)$ e S_m. Tale studio si può fondare sulla teoria di Young del gruppo simmetrico. Le rappresentazioni di S_m possono essere descritte mediante tabelle. Data una tabella della forma



con un totale di m caselle, la si riempia con i numeri $1, 2, \ldots, m$ in modo tale che i numeri siano crescenti sulle righe e sulle colonne. Una tale tabella viene detta standard. L'insieme delle tabelle standard di una forma preassegnata può essere preso come base di una rappresentazione irriducibile di S_m. Ogni rappresentazione irriducibile di S_m è associata alle tabelle di data forma. Le rappresentazioni irriducibili di S_m che appaiono in $V^{\otimes m}$ sono esattamente quelle in cui la prima riga possiede al piú n elementi ($n = \dim V$). In corrispondenza di una tale rappresentazione di S_m vi è una rappresentazione irriducibile di $\mathrm{Gl}(V)$ descritta ancora dalla stessa tabella. In questo caso però per ottenere una base della rappresentazione si deve riempire la tabella con i numeri $1, 2, \ldots, m$, in modo tale che i numeri su ogni riga siano strettamente crescenti mentre sulle colonne siano solo non decrescenti (si ammette cioè la possibilità di ripetere un indice).

Si può sviluppare una teoria analoga per gli altri gruppi classici. Per esempio per il gruppo ortogonale si deve considerare che lo spazio tensoriale $V^{\otimes m}$ oltre alle simmetrie di S_m possiede altri operatori che commutano con il gruppo dato. Solo restringendosi al sottospazio di $V^{\otimes m}$ formato dai tensori che si annullano rispetto alle contrazioni si ha una teoria, simile alla precedente, che mette in relazione il gruppo ortogonale con il gruppo simmetrico. Gli sviluppi della teoria accennata sono contenuti nel trattato *Classical Groups* di Weyl [1939]. In esso sono anche esposti i legami fra questa teoria e la teoria classica degli invarianti ed in effetti i teoremi citati vengono dimostrati utilizzando l'espansione di Capelli che è stata a sua volta la base della teoria di Young.

12. *Invarianti algebrico-geometrici, topologici e differenziali.*

Vi è una direzione completamente diversa, nella ricerca degli invarianti, che si distacca notevolmente dalle idee del programma di Erlangen: si tratta della ricerca di invarianti nel caso in cui gli oggetti in esame (varietà, spazi topologici, ecc.) non abbiano un gruppo di trasformazioni sufficientemente grande.

Per introdurre la discussione si ritorna alla definizione di genere di una

curva piana data alla fine del § 4, e se ne precisa il significato topologico. Ci si ponga per semplicità nel caso in cui la curva $\mathcal{C}$ sia priva di punti doppi; in tal caso l'insieme dei suoi punti con coordinate complesse forma una superficie compatta orientabile Σ, detta superficie di Riemann. Una tale superficie può essere classificata topologicamente (cioè ha la forma) come una ciambella con g buchi, ove g è esattamente il genere di $\mathcal{C}$ dato proiettivamente (cfr. fig. 6). Il legame fra topologia e struttura proiettiva si arricchisce ancora di piú con la teoria delle funzioni algebriche su $\mathcal{C}$. Si hanno i famosi teoremi:

1) Lo spazio $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$ dei differenziali (di prima specie) algebrici su $\mathcal{C}$ e senza poli ha dimensione g.
2) Sia V_1 lo spazio delle funzioni che, su dei punti $Q_1, \ldots, Q_s$ e $P_1, \ldots, P_k$ preassegnati su $\mathcal{C}$, hanno poli di ordine al piú $m_1, \ldots, m_s$ e rispettivamente zeri di ordini almeno $n_1, \ldots, n_k$ (e nessun altro polo). Sia V_2 lo spazio dei differenziali che su $Q_1, \ldots, Q_s$ hanno zeri di ordine almeno $m_1, \ldots, m_s$ e su $P_1, \ldots, P_k$ poli di ordine al piú $n_1, \ldots, n_k$. Dette d_1 e d_2 le dimensioni di V_1 e V_2 rispettivamente si ha $d_1 - d_2 = \Sigma m_i - \Sigma n_j - g + 1$.

Questo teorema di Riemann-Roch permette di fornire per ogni curva algebrica un modello proiettivo canonico, ovvero l'equivalenza analitica fra curve coincide con l'equivalenza proiettiva fra i modelli canonici.

3) Fissata una curva chiusa γ su una superficie di Riemann Σ si integrino su γ i differenziali di prima specie; si ottiene in questo modo un elemento dello spazio duale $\mathfrak{D}^*(\mathcal{C})$ di $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$. Le forme associate a tutte le curve chiuse formano un sottogruppo $\mathfrak{H}$ libero su $2g$ generatori. Si fissi su Σ un punto base P, e, dati i punti $P_1, \ldots, P_k$ e $Q_1, \ldots, Q_k$, si congiunga P e P_i e P e Q_j con curve γ_i e $\bar{\gamma}_j$ (fig. 7). Si calcoli poi

$$\sum_i \int_{\gamma_i} dv - \sum_i \int_{\gamma_i} dv \qquad dv \in \mathfrak{D}(\mathcal{C})$$

si ottiene una forma φ lineare su $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$. Si ha allora il seguente

TEOREMA (Abel). *$\varphi \in \mathfrak{H}$ se e solo se esiste una funzione algebrica su Σ che ha esattamente $P_1, \ldots, P_k$ come zeri e $Q_1, \ldots, Q_k$ come poli.*

Si possono ora ricollegare questi sviluppi con il programma di Erlangen.

Una curva $\mathcal{C}$ di genere 1 ha un modello costituito da una cubica piana non singolare di equazione $y^2 = x^3 + g_1 x + g_2$. La teoria delle funzioni analitiche su $\mathcal{C}$

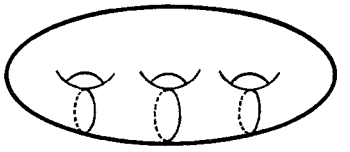


Figura 6.
Una ciambella con tre buchi.

coincide con la teoria delle «funzioni ellittiche». Infatti, detti ω_1 e ω_2 i due periodi ottenuti integrando il differenziale di prima specie dx/y sui due generatori γ_1 e γ_2 del toro (cfr. fig. 8), le funzioni algebriche su $\mathcal{C}$ si identificano alle funzioni meromorfe sul piano, periodiche e di periodi ω_1 e ω_2. In particolare le funzioni x e y si identificano rispettivamente alla funzione $P(z)$ di Weierstrass e alla sua derivata, ove

$$P(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right] \qquad \omega=n\omega_1+m\omega_2;\ n,m\in\mathbf{Z}.$$

Inoltre la curva $\mathcal{C}$ si identifica analiticamente al gruppo quoziente del piano complesso modulo il sottogruppo generato dai due periodi.

Nel caso in cui $\mathcal{C}$ è una curva di genere $g>1$ vi è una funzione analitica uniformizzante: $\pi : H\to\mathcal{C}$ ove $H=\{z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$ è il semipiano superiore. La curva $\mathcal{C}$ risulta essere il quoziente di H rispetto al gruppo G delle trasformazioni analitiche di H che lasciano invariante π. Interpretando H come piano iperbolico, tale gruppo è un gruppo discreto di isometrie e si può presentare algebricamente con $2g$ generatori $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_g, y_g$ ed una unica relazione $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1}\ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}=1$. Inoltre si può pavimentare il piano iperbolico con poligoni equivalenti e con $2g$ lati i quali, tramite π, coprono la superficie di Riemann Σ associata a $\mathcal{C}$, con sole identificazioni sui lati. Anche in questo caso si ha che le funzioni meromorfe su $\mathcal{C}$ coincidono con le funzioni meromorfe su H e invarianti rispetto a G.

Lo studio dei gruppi discreti di movimenti di H e delle funzioni per essi invarianti (funzioni automorfe) è un campo molto vasto che ha profondi legami con la teoria dei numeri. Ci si limita ad osservare che fra i gruppi di movimenti di H vi è il gruppo Γ delle trasformazioni del tipo $z\to(az+b)/(cz+d)$, $ad-cb=1$, con a, b, c, d interi.

Le funzioni meromorfe su H invarianti rispetto a Γ e soddisfacenti un'opportuna condizione all'infinito sono funzioni razionali di un'unica funzione $j(z)$, detta funzione modulare. Tramite la considerazione di funzioni ad essa strettamente legate, Klein dette le formule risolutive dell'equazione di quinto grado; su tali funzioni si basa inoltre un'importante parte della teoria dei numeri (teoria della moltiplicazione complessa). Gli argomenti sopra esposti trovano la loro generalizzazione nella teoria dei «gruppi aritmetici».

Tornando al teorema di Abel, si cita una proprietà importante del sottogruppo $\mathcal{H}$. Esso è un reticolo in $\mathcal{D}^*(\mathcal{C})$; inoltre, considerata la forma hermitiana su

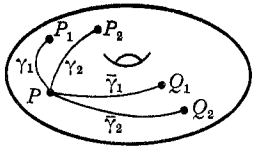


Figura 7.
Esempi di curve sul toro.

$\mathcal{D}(\mathcal{C})$ $\int_{\mathcal{C}} dv\wedge d\bar{w}$ e identificato $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ con $\mathcal{D}^*(\mathcal{C})$ tramite essa, la sua parte alterna prende valori interi su $\mathcal{H}$. Da questo si deduce l'esistenza di numerose funzioni meromorfe su $\mathcal{D}^*(\mathcal{C})$ e periodiche relativamente agli elementi di $\mathcal{H}$. Ne segue che la varietà analitica $\mathcal{D}^*(\mathcal{C})/\mathcal{H}$ è in effetti una varietà algebrica (varietà jacobiana di $\mathcal{C}$). La teoria generale dei reticoli di periodi nello spazio $\mathbf{C}^n$ per cui vi sono molte funzioni meromorfe periodiche è nota come «teoria delle varietà abeliane».

Si cita infine il teorema di Torelli che afferma che una curva $\mathcal{C}$ è individuata dalla sua varietà jacobiana $\mathrm{J}(\mathcal{C})$, pur di considerare su $\mathrm{J}(\mathcal{C})$ una struttura supplementare (la polarizzazione principale data dal divisore Θ).

Si ritorni a considerazioni piú elementari. Presa una superficie chiusa Σ, per esempio immersa nello spazio a tre dimensioni, vi è una stretta relazione fra il suo genere ed un carattere differenziale locale della superficie: la curvatura. Intuitivamente l'idea è la seguente: si guarda la superficie in un piccolo intorno di un suo punto; tagliando la superficie secondo piani ortogonali al piano tangente, si hanno curve sezioni con raggio di curvatura variabile. Fra esse ve ne sarà una con raggio minimo r_1 e una con raggio massimo r_2; la curvatura gaussiana è $\rho=1/r_1r_2$. Essa è pertanto una funzione sulla superficie (immersa) che descrive in certo modo come la superficie si piega in ogni punto. Il teorema principale che lega questo invariante con il genere g già studiato è fornito dal

TEOREMA (Gauss-Bonnet). $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \rho\, d\sigma=2-2g.$

Questo invariante ρ e il teorema medesimo ammettono profonde generalizzazioni. Il punto focale consiste nel poter calcolare la derivata tangenziale di un vettore variabile su Σ. Cosí si arriva alla nozione di connessione affine per una varietà differenziabile. Dato un campo di vettori tangenti X, da considerare come le direzioni della derivazione, si deve poter derivare un campo qualunque Y, e ottenere un nuovo campo $\nabla_X(Y)$, detto derivata covariante. Gli assiomi sono tali da permettere di pensare ∇ (la connessione affine) come un'operazione dai campi di vettori ai campi di vettori, con coefficienti forme differenziali (cfr. l'articolo «Geometria e topologia», § 5.4). Usando le classiche notazioni, cioè i «simboli di Christofell», in coordinate locali si ha

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_j}dx_k.$$

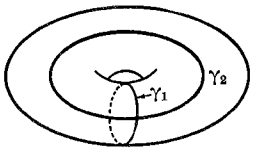


Figura 8.
Il toro (superficie di genere 1) con i suoi due generatori.

Se si deriva due volte con tale connessione si ha

$$\nabla\left(\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)=\sum\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Gamma_{ij}^k\,dx_k+\sum\frac{\partial}{\partial x_j}\,d\Gamma_{ij}^k\,dx_k$$

cioè

$$\nabla^2\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

dove le $a_{ij}=\Sigma R_{ij}^{hk}\,dx_h\,dx_k$ sono forme differenziali di secondo grado. Il punto essenziale è che la matrice (a_{ij}) è un tensore (il tensore di curvatura di Riemann), cioè si trasforma per cambiamenti di coordinate con le leggi dell'algebra multilineare.

I coefficienti del polinomio caratteristico di tale tensore sono delle forme differenziali c_i le quali hanno un carattere invariante particolarmente significativo (come si spiegherà in seguito). Il teorema di Gauss-Bonnet si estende a varietà di dimensione qualunque, ma per spiegare questo punto è necessario ritornare agli invarianti topologici delle varietà.

Si è già accennato al fatto che la superficie di Riemann di una curva di genere g è ottenibile da un poligono di $2g$ lati con opportune identificazioni sul bordo. In generale si studiano gli spazi che si possono ottenere incollando fra loro lungo le facce piramidi di qualunque dimensione. Tali spazi vengono detti triangolabili. Se X è triangolabile, esso lo è in infiniti modi ed è per questo che assumono importanza capitale gli invarianti di X che non dipendono dalla triangolazione ma che sono calcolabili tramite una qualunque di esse. Il piú semplice fra questi invarianti è un invariante numerico, detto caratteristica di Eulero-Poincaré, denotato con $\chi(X)$ e calcolato nel modo seguente. Sia $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_m$ il numero di piramidi di dimensione rispettivamente $0, 1, 2, \ldots, m$ che appaiono in una triangolazione di X (fig. 9); risulta allora $\chi(X)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i n_i$. $\chi(X)$ dipende solo da X e non dalla decomposizione scelta.

Esempio.

Si consideri lo spazio X tratteggiato in figura 10. Per la prima decomposizione si ha: $n_0=7$, $n_1=12$, $n_2=5$ e $\chi(X)=0$. Per la seconda decomposizione: $n_0=4$, $n_1=6$, $n_2=2$ e sempre $\chi(X)=0$.

Nel caso di una superficie di Riemann Σ di genere g si verifica immediatamente che $\chi(\Sigma)=2-2g$. (Poiché la superficie è determinata dal genere, ci si doveva aspettare a priori un'espressione di $\chi(\Sigma)$ tramite g).

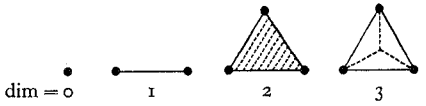


Figura 9.
Esempi di m-simplessi o piramidi di dimensione m.

La caratteristica di Eulero-Poincaré è solo il primo di molti invarianti essenziali nello studio di uno spazio X. La teoria si può cominciare a spiegare facendo riferimento ad un esempio semplice di carattere fisico, cioè il problema dell'esistenza del potenziale: da un campo di forze $\mathbf{f}(p)$ si cerca di trovare una funzione P della sola posizione tale che $\mathbf{f}(p)=\operatorname{grad}P$. Fissato un punto p_0, la $P(p)$ si ottiene in generale integrando il campo di forze lungo una curva $\mathcal{C}$ che unisce p_0 e p. Il potenziale è indipendente da tale curva purché: 1) il campo sia conservativo; 2) non vi siano poli nel campo di forze; altrimenti esso dipende da quante volte $\mathcal{C}$ si è avvolta attorno a tali poli.

In generale, su una varietà M si pone il problema dell'integrazione delle forme differenziali. Dare una forma differenziale ψ di grado k su una varietà M vuol dire, intuitivamente, assegnare un volume con segno ad ogni k-poliedro infinitesimo orientato e in modo tale che la variazione di tale volume sia differenziabile (fig. 11). Questo è, di fatto, un modo per assegnare una misura ad ogni sottovarietà k-dimensionale immersa in M. Con i simboli usuali dell'analisi, in coordinate locali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ della varietà, ψ è della forma

$$\psi=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} f_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

e i simboli dx_i verificano le regole formali dell'algebra di Grassmann (cfr. § 8).

Per integrare ψ bisogna assegnare un «cammino» di integrazione, ovvero una sottovarietà k-dimensionale di M. Poiché l'integrazione è un'operazione suscettibile di essere spezzata, si possono dare come «cammini» tante k-piramidi orientate in M. L'integrazione delle forme differenziali è determinata dal fondamentale teorema di Stokes, che ora si illustra.

Un cammino σ di integrazione, di dimensione k, ha un bordo naturale $\partial\sigma$ (le facce delle piramidi di σ), di dimensione $k-1$; d'altra parte vi è una nozione naturale di differenziale di una forma

$$d\psi=d\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\right)=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\left(\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Pertanto, dato un cammino σ di dimensione k ed una forma ψ di dimensione $k-1$ restano individuati i due numeri $\int_\sigma d\psi$ e $\int_{\partial\sigma}\psi$. Il teorema di Stokes afferma che i due integrali scritti sono uguali. Se ne deduce facilmente che, se ψ

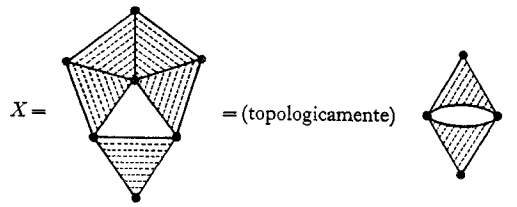


Figura 10.
Due spazi triangolabili con uguale caratteristica di Eulero-Poincaré.

è una forma tale che $d\psi = 0$ (forma chiusa), il suo integrale sul bordo di un cammino è nullo. Il formalismo e la teoria che se ne deducono sono fondamentali in tutta la moderna geometria.

Un primo passo in questa direzione è la formalizzazione della nozione di «cammino». Se X è uno spazio topologico, un k-simplesso di X è un'applicazione continua σ in X della piramide standard k-dimensionale $\Delta_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid \Sigma x_i \leq 1,\ x_i \geq 0\}$, $\sigma : \Delta_k \to X$. Una catena a coefficienti in un dato anello A è una combinazione lineare formale di simplessi: $c = \Sigma a_\sigma \sigma$, $a_\sigma \in A$ (spesso si assume $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}/(p), \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$). Il bordo $\partial\sigma$ di un simplesso è la restrizione di σ al bordo di Δ_k; il bordo di una catena $c = \Sigma a_\sigma \sigma$ è dato da $\partial c = \Sigma a_\sigma \partial\sigma$. Se ne deduce la nozione di ciclo, cioè una catena con bordo nullo, e quella di gruppi di omologia singolare dello spazio a coefficienti nell'anello A: $H_i(X, A)$ = gruppo dei cicli di dimensione i, modulo il sottogruppo dei bordi.

I punti fondamentali di tale costruzione sono: 1) il passaggio dalla geometria all'algebra; 2) la possibilità effettiva di calcolo di tali gruppi, i quali sono di tipo finito (per $A = \mathbf{Z}$), nel caso in cui X è un poliedro finito; 3) il fatto che una varietà compatta si può costruire come un poliedro finito. In particolare, per un poliedro finito X, $H_i(X, \mathbf{Q})$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita b_i ($b_i = 0$ per i grande). Gli interi b_i sono degli invarianti topologici e si chiamano numeri di Betti; essi sono legati alla caratteristica di Eulero-Poincaré dalla formula $\chi(X) = \Sigma(-1)^i b_i$.

Il legame fra i gruppi di omologia (che sono degli invarianti topologici) e le forme differenziali è fornito dal famoso teorema di De Rham. Sia M una varietà compatta; se si integra una forma chiusa ψ di dimensione k sui cicli k-dimensionali, il valore dell'integrale dipende solo dalla classe di omologia dei cicli ed è nullo se $\psi = d\varphi$ (forma esatta). Si ottiene pertanto un omomorfismo j dello spazio Z^k/B^k, coomologia di De Rham delle forme chiuse modulo le forme esatte, nello spazio duale di $H_k(X, \mathbf{R})$: $(Z^k/B^k) \to H_k(X, \mathbf{R})^*$. Il teorema di De Rham afferma che j è un isomorfismo.

Il teorema di De Rham acquista una prospettiva ancora piú significativa se si considerano dei casi speciali e i successivi sviluppi.

1) Se M è uno spazio simmetrico la teoria risale a Cartan, il quale ha provato che, detto C^k lo spazio delle k - forme differenziali invarianti rispetto al gruppo delle isometrie, si ha $Z^k = B^k \oplus C^k$.

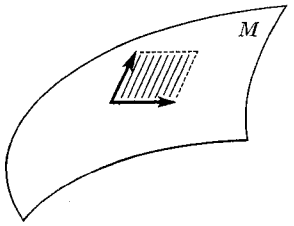


Figura 11.
k-poliedro infinitesimo sulla varietà M.

2) Teoria di Hodge. Se su M si considera una metrica riemanniana, questa permette di definire sullo spazio delle k-forme un operatore differenziale del secondo ordine Δ, detto operatore di Laplace-Beltrami. Le forme ψ per cui $\Delta\psi = 0$ vengono dette forme armoniche e costituiscono uno spazio vettoriale H^k. Il teorema di Hodge asserisce che $Z^k = B^k \oplus H^k$. Nel caso di uno spazio simmetrico si può scegliere la metrica, e quindi Δ, in modo che siano invarianti; in corrispondenza si ottiene $C^k = H^k$.

Si torni infine al teorema di Gauss-Bonnet. Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione $2n$ e sia $(a_{ij}) = (\Sigma R_{ij}^{hk}\, dx_h \wedge dx_k) = \Omega$ la matrice del tensore di curvatura. Ω è antisimmetrica e se ne può costruire quindi lo pfaffiano K (cfr. § 3), che risulta una forma di dimensione $2n$; pertanto K può essere integrato su M e si ha $1/(2\pi)^n \int_M K = \chi(M)$.

13. *Gli sviluppi della topologia algebrica e differenziale.*

Le idee rapidamente esposte nel § 12 hanno dato luogo a vaste aree di ricerca: topologia algebrica, algebra omologica, teoria dei fasci, ecc. Di esse si può dare solo un cenno. Si inizia dalla topologia algebrica: questa parte della matematica si è sviluppata negli ultimi settant'anni ad opera di numerosissimi matematici. Il suo punto di partenza sono state le idee legate allo studio topologico delle superfici di Riemann: la classificazione, lo studio delle curve su di esse, i rivestimenti e tutto quel materiale che, pur strettamente legato alla teoria algebrico-geometrica, si può trattare con metodi combinatori o di continuità. Il tentativo di estendere i risultati, estremamente completi nel caso delle superfici di Riemann, a varietà di dimensione piú elevata si è dimostrato un progetto di grande difficoltà e, nonostante i grandissimi progressi fatti, è ancora lontano dall'avere risposte soddisfacenti.

Gli invarianti topologici, costruiti per attaccare i problemi geometrici in oggetto, sono molteplici. Prima di tutto vi sono i gruppi di omologia singolare a cui si è accennato nel paragrafo precedente e i gruppi di coomologia costruiti in modo duale; in secondo luogo i gruppi di omotopia $\pi_i(X)$ di uno spazio topologico. Essi sono definiti come applicazioni continue di una sfera S^i ad i-dimensioni in X a meno di una equivalenza, detta omotopia. L'omotopia prescrive come equivalenti due applicazioni $f, g : S^i \to X$ se esiste una deformazione continua $F(x, t)$, con $x \in S^i$, t parametro variabile in $[0, 1]$, tale che $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$. I gruppi di omotopia sono invarianti che contengono molte informazioni sulla geometria di X; ma sono estremamente difficili da calcolare. Solo informazioni parziali, ad esempio, sono note per i gruppi di omotopia delle sfere.

L'utilizzazione di tali gruppi per i problemi di classificazione comporta una serie di questioni, alcune insolute. La piú famosa congettura in questa direzione è dovuta a Poincaré: se X è una varietà orientabile n-dimensionale equivalente omotopicamente ad una sfera, è vero che X è una sfera?

I risultati in questa direzione sono sorprendenti; non è nota la risposta per

$n=3$ e 4 mentre per $n \geq 5$ la risposta, dovuta a Smale, è affermativa. Inoltre se si pone l'attenzione sull'asserzione «X è una sfera» ci si rende conto che essa si presta a varie interpretazioni. X può essere una sfera nel senso puramente topologico, cioè esiste un'applicazione $X \to S^n$ biunivoca e continua (un omeomorfismo). X può essere una sfera nel senso differenziabile, cioè esiste una applicazione $X \to S^n$ biunivoca e differenziabile insieme alla sua inversa (un diffeomorfismo). Le due asserzioni sono equivalenti per $n<7$ ma per $n \geq 7$ esistono delle varietà omeomorfe ad S^n ma non diffeomorfe [Milnor 1956]; tali varietà vengono chiamate sfere esotiche.

Una delle tecniche geometriche piú fruttuose nello studio di queste questioni è stata la teoria di Morse ed il cobordismo.

L'idea della teoria di Morse è la seguente. Su una varietà X sia data una funzione f (detta funzione di Morse) le cui singolarità (punti critici) siano non degeneri (ovvero se

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = 0 \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

in un punto di coordinate $p \equiv (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ allora la matrice hessiana

$$\left\| \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_p \right\|$$

è a determinante non nullo). Se un numero c non è un valore assunto da f nei punti critici (valori critici), la parte X^c di X dove f ha valore $\leq c$ è una varietà con bordo (parte del bordo di X e la superficie di livello $f(x)=c$ in X). Il punto fondamentale è la descrizione di come varia X^c quando c passa attraverso un valore critico. Se $c_1<c_2$ e $X^{c_1} \setminus X^{c_2}$ contiene un solo punto critico p, allora X^{c_2} è omotopicamente equivalente allo spazio ottenuto attaccando ad X^{c_1} un disco di dimensione pari al numero degli autovalori negativi della matrice hessiana nel punto p. Con tale descrizione è possibile analizzare come una varietà è costruibile attaccando dischi.

La teoria accennata è legata alla teoria di Thom del cobordismo. Due varietà senza bordo X, Y, di dimensione n, si dicono cobordanti se esiste una varietà W di dimensione $n+1$ avente come bordo $X \cup Y$. La teoria di Morse mostra come tutte le superfici di livello di una funzione di Morse sono cobordanti fra loro; viceversa se $X \cup Y$ è il bordo di W, sulla varietà W si può costruire una funzione di Morse di cui X e Y siano le superfici di livello per i valori 0 ed 1.

La possibilità di rendere algebricamente calcolabili i problemi di cobordismo è dovuta ad altre idee fondamentali della topologia algebrica: le idee di spazio classificante e di classi caratteristiche. Esse si fondano sui seguenti metodi: 1) Classificare oggetti geometrici su uno spazio X tramite le classi di omotopia di applicazioni di X in uno spazio fisso Y detto lo spazio classificante della situazione in oggetto. 2) Associare agli oggetti geometrici alcuni invarianti coomologici, le classi caratteristiche, ottenute dalla coomologia di Y a partire dall'applicazione classificante $f: X \to Y$. Pertanto l'applicabilità di queste idee

dipende dal descrivere l'eventuale spazio classificante e nel calcolarne la coomologia e l'omotopia. Uno degli esempi piú significativi è dato dal teorema di classificazione dei fibrati con gruppo strutturale G, i quali possiedono uno spazio classificante, denotato con B_G. Nel caso in cui G sia un gruppo di Lie compatto è possibile calcolare la coomologia di B_G (teorema di Chern-Weil) e pertanto calcolare la teoria delle classi caratteristiche corrispondenti. Questo teorema è legato a quello sugli invarianti dei gruppi di riflessioni (cfr. § 9). Le applicazioni geometriche che se ne deducono sono molteplici: dallo studio del cobordismo all'analisi delle singolarità dei campi vettoriali e alla classificazione delle immersioni di una varietà in un'altra.

Uno dei teoremi piú interessanti in questa direzione è il teorema di periodicità di Bott. Tale teorema asserisce che i gruppi di omotopia $\pi_i(SU(n))$ del gruppo unitario speciale sono periodici per $n \gg i$. In effetti $\pi_i(SU(n))=0$ per i pari e $\pi_i(SU(n))=\mathbf{Z}$ per i dispari (sempre $n \gg i$). Un'altra ma piú complessa periodicità vale per il gruppo ortogonale e simplettico.

Si può riprendere ora il discorso fatto sul tensore di curvatura di Riemann; i coefficienti σ_i del suo polinomio caratteristico sono forme differenziali chiuse che corrispondono in coomologia alle classi caratteristiche del fibrato tangente alla varietà riemanniana data.

14. *Algebra omologica e teoria dei fasci.*

L'algebra omologica è stata sviluppata in primo luogo per calcolare gli invarianti che sorgono in topologia algebrica. Essa ha avuto, però, importanti applicazioni in numerose aree della matematica: algebra commutativa, geometria algebrica, teoria dei numeri, ecc.

Le nozioni fondamentali dell'algebra omologica, che formalizzano le proprietà algebriche dell'omologia degli spazi, sono quelle di complesso algebrico e relativa omotopia. Un complesso è una successione di gruppi abeliani ed omomorfismi $\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \ldots$ tali che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ per ogni n.

Il gruppo $Z_i = \operatorname{Ker} \partial_i$ è detto il gruppo degli i-cicli e $B_i = \operatorname{Im} \partial_{i+1}$ è detto gruppo degli i-bordi; infine $H_i = Z_i/B_i$ è l'omologia del complesso. Se $H_i=0$ per ogni i si dice che il complesso è una successione esatta.

Tali dati riflettono algebricamente svariate situazioni geometriche ed uno dei primi compiti dell'algebra omologica consiste nel fornire metodi di calcolo sui complessi. Nel cercare di sviluppare tali metodi è stato necessario introdurre nuovi invarianti e nuove costruzioni; la piú importante è la nozione di funtore e dei suoi satelliti. La situazione tipica è la seguente: si parte da una «categoria abeliana» $\mathcal{A}$ ovvero una classe di oggetti che abbia le stesse proprietà formali della classe dei moduli su un anello, le rappresentazioni continue di un gruppo topologico, i fasci di moduli, i fasci coerenti su una varietà algebrica o analitica, ecc. e i loro morfismi. In $\mathcal{A}$ ha senso la nozione di complesso e di successione esatta, ecc. Successivamente su $\mathcal{A}$ si considera un «funtore semiesat-

to» F, cioè un'applicazione che ad ogni oggetto $X \in \mathcal{A}$ associa un oggetto $F(X)$ di un'altra categoria abeliana $\mathcal{B}$ e ad ogni morfismo $f: X \to Y$ un morfismo $F(f): F(X) \to F(Y)$, con la condizione che se $0 \to X_1 \to X_2 \to X_3$ è esatta allora anche $0 \to F(X_1) \to F(X_2) \to F(X_3)$ è esatta. Ad ogni funtore semiesatto F si può associare, sotto ipotesi opportune, un'intera successione di funtori $F^i: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ legati fra loro in modo da fornire un'unica successione esatta $0 \to \to F(X_1) \to F(X_2) \to F(X_3) \to F^1(X_1) \to F^1(X_2) \to F^1(X_3) \to F^2(X_1) \to \ldots \to F^n(X_1) \to \to F^n(X_2) \to F^n(X_3) \to F^{n+1}(X_1) \to \ldots$ I funtori F^i sono detti funtori derivati o satelliti di F. In questo modo si ottengono ad esempio i funtori Ext^i e Tor^i.

La teoria dei fasci è uno strumento fondamentale nella moderna geometria algebrica. La sua origine risiede in una delle dimostrazioni del teorema di De Rham e di Riemann-Roch.

Un fascio $\mathfrak{F}$ su uno spazio topologico X consiste nell'assegnare ad ogni aperto $U \subset X$ un gruppo abeliano $\mathfrak{F}(U)$, i cui elementi vengono detti sezioni di $\mathfrak{F}$ su U, e un'operazione di restrizione (omomorfismo) $\mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$ $(s \to s|_V)$ per ogni aperto $V \subset U$; si assume inoltre che una sezione s su un aperto U che sia ricoperto da aperti U_i sia determinata non appena siano date le sue restrizioni $s_i = s|_{U_i}$ sugli aperti U_i; e infine tali restrizioni possono essere assegnate arbitrariamente purché soddisfino le proprietà di incollamento $s_i|_{U_i \cap U_j} = = s_j|_{U_i \cap U_j}$.

I fasci su X formano una categoria abeliana e quindi possono ad essi essere applicati i metodi dell'algebra omologica. In particolare i funtori derivati del funtore $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}(X)$ sono invarianti fondamentali, detti gruppi di coomologia di X e coefficienti in $\mathfrak{F}$ ed indicati con $H^i(X, \mathfrak{F})$. Nelle situazioni geometriche piú interessanti X è una varietà differenziabile oppure analitica oppure algebrica; in ogni caso X è dotata di un «fascio strutturale» ϑ di anelli ove $\vartheta(U) =$ l'anello delle funzioni C^∞, rispettivamente analitiche o algebriche, su U. È allora utile considerare fasci di moduli su ϑ; ad esempio, dato un fibrato vettoriale E (su X), C^∞, olomorfo o algebrico, il fascio delle sezioni di E è un fascio di ϑ-moduli. Nel caso algebrico o analitico hanno particolare rilevanza alcuni fasci di moduli di tipo speciale: i fasci coerenti; ad essi si riferiscono importanti teoremi di Oka, Chow, Cartan, Serre, Kodaira, ecc.

15. *Gli invarianti delle superfici algebriche.*

La geometria algebrica, dopo lo sviluppo della teoria delle curve, ha avuto grandi successi nello studio del caso successivo: la teoria delle superfici algebriche (che, come varietà, hanno dimensione reale 4). I nomi che si devono ricordare in questa direzione sono quelli di Castelnuovo, Enriquez, Picard, Severi e piú recentemente Kodaira, Bombieri. La base della teoria consiste nel tentare di estendere alle superfici gli invarianti noti nel caso delle curve, sviluppare poi il teorema di Riemann-Roch e quindi la teoria delle curve sulle superfici e la loro classificazione.

Data una superficie algebrica Σ i suoi invarianti fondamentali si possono ottenere, come nel caso delle curve, dallo studio delle forme differenziali olomorfe. Se si studia lo spazio delle 1-forme olomorfe si trova in particolare che esso ha dimensione finita q, detta irregolarità della superficie; inoltre lo spazio delle 2-forme o piú in generale quello delle potenze simmetriche n-esime delle 2-forme ha anch'esso dimensione finita, detta n-genere. Questi invarianti dànno delle importanti informazioni sulla geometria della superficie.

Lo studio di una superficie è basato sostanzialmente sull'analisi delle curve algebriche tracciate su di essa e piú in generale dei divisori ovvero combinazioni lineari formali di curve a coefficienti interi. I divisori si possono sommare e sottrarre e formano un gruppo. Sui divisori di Σ si possono considerare alcune importanti equivalenze: l'equivalenza algebrica definita a partire dall'idea di deformazione di un divisore in un altro mediante una famiglia algebrica; l'equivalenza lineare ottenuta dalla considerazione dei divisori degli zeri e dei poli delle funzioni su Σ. Tali divisori formano un sottogruppo Γ del gruppo di tutti i divisori. L'insieme dei divisori positivi D linearmente equivalenti ad un divisore fissato Δ (ovvero per cui $D - \Delta \in \Gamma$) forma uno spazio proiettivo detto sistema lineare completo associato a Δ. Tali sistemi sono strettamente legati alle immersioni di Σ negli spazi proiettivi. I divisori algebricamente equivalenti a 0 sono un sottogruppo del gruppo di tutti i divisori; il gruppo quoziente è un invariante di Σ e risulta sempre finitamente generato (teoria della base di Severi).

La differenza fra equivalenza algebrica ed equivalenza lineare è legata all'irregolarità q tramite la considerazione di un ulteriore invariante di Σ: la varietà di Albanese; essa è una varietà abeliana di dimensione q che parametrizza una famiglia algebrica massimale di curve non linearmente equivalenti. Il punto di partenza della teoria è dato dal teorema di Riemann-Roch che descrive il legame fra la dimensione del sistema lineare completo associato ad un divisore Δ ed altri invarianti della superficie. Lo si descriverà ampiamente nel prossimo paragrafo.

16. *Il teorema di Riemann-Roch generale e il teorema dell'indice.*

I metodi algebrici e geometrici cui si è accennato (cobordismo, teoria dei fasci, omotopia, algebra omologica, accoppiati con le idee analitiche e differenziali di De Rham, Hodge, ecc.) hanno portato negli ultimi vent'anni a potenti estensioni delle tecniche classiche sviluppate per le curve e le superfici. In particolare il teorema di Riemann-Roch, formulato e provato da Hirzebruch per le varietà analitiche di qualunque dimensione, è stato generalizzato da Grothendieck ed infine legato ad una piú generale teoria dell'indice degli operatori ellittici da Atiyah e Singer. Si cercherà ora di accennare a questi sviluppi.

Come si è visto precedentemente (cfr. § 13), su una varietà complessa X (di dimensione complessa n) vi sono le classi caratteristiche $c_1, c_2, \ldots, c_n$, dette classi di Chern, ove c_i è una classe di coomologia di dimensione $2i$. Indicata

con g_i la dimensione dello spazio delle i-forme olomorfe su X, un primo problema di tipo Riemann-Roch consiste nell'esprimere la somma $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i$ in termini topologici. Severi congetturò che tale numero fosse esprimibile solo tramite le classi c_i. Todd costruí per ogni n un polinomio esplicito T_n (detto polinomio di Todd) il cui valore nelle classi di Chern $T_n(c_1, ..., c_n)$ è una classe di coomologia di dimensione $2n$, e congetturò che il numero $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i$ fosse il valore di $T_n(c_1, ..., c_n)$ sulla classe fondamentale. Tale congettura è conseguenza della teoria di Hirzebruch. Per esempio per $n=2$, $T_2=(c_1^2+c_2)/12$.

Un'altra conseguenza di tale teoria è la dimostrazione di una seconda congettura di Severi, il quale, nel caso in cui X sia una varietà proiettiva, affermava che il numero $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i$ coincideva con un invariante proiettivo: il genere aritmetico p_a. Tale invariante p_a si deduce dalla formula di postulazione di Hilbert che ora si illustra. Sia X una varietà proiettiva nello spazio ad n dimensioni ed $I=\oplus I_m$ l'ideale omogeneo delle forme nulle su X. Si consideri lo spazio A_m delle forme di grado m nelle variabili $x_0, ..., x_n$ mod I_m; la formula di postulazione afferma che la dimensione d_m dello spazio A_m è esprimibile, per m sufficientemente grande, come polinomio in m. Tale polinomio è evidentemente un invariante proiettivo di X; il suo termine costante è, per definizione, il genere aritmetico.

La teoria di Hirzebruch mostra, piú in generale, come si possa calcolare la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(X, E)$ di un fibrato vettoriale complesso E su X. Per definizione $\chi(X, E)=\Sigma(-1)^i \dim H^i(X, E)$, dove $H^i(X, E)$ è la coomologia del fascio delle sezioni di E. Se E è il fibrato 1-dimensionale banale su X, la sua caratteristica coincide con il numero $\Sigma(-1)^i g_i$ in virtú del seguente teorema di dualità:

TEOREMA (Serre). *Posto $H^{p,q}(X, E)=H^q(X, E\otimes\Lambda^p T^*)$, con T^* fibrato cotangente, si ha l'isomorfismo canonico $H^{p,q}(X, E)\simeq(H^{n-p,n-q}(X, E^*))^*$.*

Ritornando alla teoria di Hirzebruch, si ha la formula

$$\chi(X, E)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{ch}_{n-j}(E)\,T_j(c_1, ..., c_j)}{j!}$$

dove T_j è il polinomio di Todd e $\mathrm{ch}(E)=\sum_k \mathrm{ch}_k(E)$ è il carattere di Chern di E. $\mathrm{ch}(E)$ è un polinomio nelle classi di Chern definito nel modo seguente: se E è un fibrato di rango k si considerano, formalmente, le sue k classi di Chern $c_1, ..., c_k$ come funzioni simmetriche elementari in k-variabili $y_1, ..., y_k$; $\mathrm{ch}(E)$ è definito allora dalla formula $\mathrm{ch}(E)=\sum_{i=1}^{k} e^{y_i}$. La formula di Hirzebruch fornisce risposta affermativa alle congetture di Severi; essa estende i teoremi classici di Riemann-Roch per le curve e le superfici e viene di solito citata come «teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch».

Una potente generalizzazione del teorema è dovuta a Grothendieck il quale osserva anzitutto che la caratteristica $\chi(X, E)$ è additiva nel senso che, se $0\to E_1\to E_2\to E_3\to 0$ è una successione esatta di fibrati su X, si ha $\chi(X, E_2)=\chi(X, E_1)+\chi(X, E_3)$. L'idea di Grothendieck è di costruire formalmente un gruppo abeliano, detto gruppo di K-teoria ed indicato con $K(X)$, il quale è generato dalle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali $[E]$ modulo le relazioni $[E_2]=[E_1]+[E_3]$ (per ogni successione esatta). La caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(X, E)$ si può pensare come un omomorfismo $\chi(X, -) : K(X)\to\mathbf{Z}$ dal gruppo di K-teoria agli interi.

Il punto fondamentale è la possibilità effettiva di calcolare $K(X)$, avvalendosi del fatto che i gruppi di K-teoria posseggono alcune delle proprietà formali della coomologia. In particolare, dato un morfismo di varietà algebriche non singolari $f : X\to Y$ si può definire un omomorfismo $f_! : K(X)\to K(Y)$, che nel caso in cui la varietà Y sia un punto si riduce alla caratteristica $\chi(X, -)$. La versione di Grothendieck del teorema di Riemann-Roch asserisce che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & H^*(X, \mathbf{Q}) \\ {\scriptstyle f_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K(Y) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & H^*(Y, \mathbf{Q}) \end{array}$$

commuta a meno della moltiplicazione per le classi di Todd, $\sum_i T_i$, di X ed Y rispettivamente (f_* è l'omomorfismo dedotto dalla dualità di Poincaré in coomologia).

Le idee di Grothendieck insieme al teorema di periodicità di Bott hanno portato ad un punto di vista completamente nuovo in topologia algebrica. Il gruppo $K(X)$ può essere definito infatti nello stesso modo a partire dai fibrati vettoriali topologici su uno spazio X. Sfruttando i teoremi di classificazione dei fibrati la periodicità di Bott si interpreta allora come isomorfismo $K(X)\simeq K(\Sigma^2 X)$ ($\Sigma^2 X$ è la doppia sospensione di X, definita da $X\times S^2/X\vee S^2$).

Si passa ora ai collegamenti con il problema dell'indice. Un operatore differenziale di ordine m si scrive in coordinate $x_1, ..., x_n$, con

$$P=\sum_{|I|\leq m} f_I(x)\frac{\partial}{\partial x^I} \qquad I \text{ multiindice;}$$

esso si dice ellittico se il polinomio $\sum_{|I|=m} f_I(x)\xi^I$ non è mai nullo per $\xi=(\xi_1, ..., \xi_n)\neq 0$.

Un sistema di operatori differenziali si scrive ancora

$$P=\sum_{|I|\leq m} f_I(x)\frac{\partial}{\partial x^I} \qquad f_I(x) \text{ matrici;}$$

esso si dice ellittico se la matrice $\sigma_P(X, \xi)=\sum_{|I|=m} f_I(X)\xi^I$ ha determinante non nullo per ogni $\xi\neq 0$. La matrice $\sigma_P(X, \xi)$ viene detta simbolo di P. Le definizioni poste si possono pensare relative a coordinate locali e si prestano ad essere globalizzate: esse dànno luogo alla nozione di operatore lineare ellittico sulle

sezioni di due fibrati vettoriali E ed F su una stessa varietà X: $C^\infty(X, E) \to \to C^\infty(X, F)$. Se X è compatta si può dimostrare che lo spazio delle autosoluzioni dell'operatore P e dell'aggiunto P^* (rispetto ad una metrica riemanniana fissata) sono di dimensione finita; si pone indice $P = \dim(\mathrm{Ker}\,P) - \dim(\mathrm{Ker}\,P^*)$. Il punto essenziale è che l'indice di P non varia per perturbazione dei coefficienti, in particolare esso dipende solo dal simbolo. Se si riflette sul significato intrinseco del simbolo si vede che σ_P si può interpretare come un isomorfismo fra i fibrati E' ed F' ottenuti da E ed F per *pull back* sullo spazio X' dei vettori cotangenti di X di modulo 1; l'indice di P dipende quindi solo dalla classe di omotopia di σ_P. All'operatore P si associa poi un fibrato vettoriale $V(\sigma_P)$ nel modo seguente: lo spazio base X'' è ottenuto considerando due coppie, X_1 e X_2, dello spazio dei vettori cotangenti di modulo ≤ 1 incollate lungo il sottospazio X'. L'isomorfismo σ_P permette di incollare i *pull back* di E ed F su X_1 e X_2 (rispettivamente) lungo X'. Il fibrato $V(\sigma_P)$ ora costruito determina un elemento di $K(X'')$, viceversa ogni elemento di $K(X'')$ si ottiene come differenza di fibrati corrispondenti ad operatori. L'indice si interpreta pertanto come un omomorfismo $i : K(X'') \to \mathbf{Z}$. Il problema dell'indice consiste nel descrivere tale omomorfismo in termini coomologici. Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer risponde con la formula: indice $P = \sum_{k=0}^{n} T_k(X)\mathrm{ch}_{n-k}(V(\sigma_P))$ a tale questione (ove il secondo membro si intende calcolato sulla classe fondamentale di X'').

Il teorema di periodicità di Bott permette di ridurre il calcolo di tale identità ad alcuni casi speciali. Per dare un'idea del legame fra il teorema di periodicità ed il teorema dell'indice si torna al calcolo del generatore del gruppo di omotopia $\pi_{2n-1}(\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}))$. Si può seguire il seguente metodo. Si considera l'algebra di Clifford sullo spazio $2n$-dimensionale $(e_1, \ldots, e_{2n})$ data dalla forma $-\Sigma x_i^2$; tale algebra si può rappresentare come algebra di matrici su uno spazio a 2^{n-1} dimensioni. Se $\Sigma x_i^2 = 1$ (cioè $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in S^{2n-1}$) la matrice corrispondente a $\Sigma x_i e_i$ è invertibile e si ha un'applicazione $S^{2n-1} \to \mathrm{Gl}(2^{n-1}, \mathbf{C})$, che fornisce appunto il generatore cercato.

Il legame con la teoria degli operatori ellittici viene dal lavoro di Dirac il quale utilizzò l'algebra di Clifford per la fattorizzazione dell'operatore di Laplace $-\Sigma \partial^2/\partial x_i^2 = [\Sigma e_i(\partial/\partial x_i)]^2$. [C. P.].

Borevich, Z. I., e Shafarevich, I. R.
1966 *Number Theory*, Academic Press, New York.

Bourbaki, N.
1971 *Eléments de mathématique*, VII. *Groupes et Algèbre de Lie*, Hermann, Paris.

Feit, W., e Thompson, J. G.
1963 *Solvability of groups of odd order*, in «Pacific Journal of Mathematics», XIII, pp. 775-1029.

Gauss, C. F.
1801 *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig.

Klein, F.
1871 *Über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie*, in «Mathematische Annalen», IV, pp. 573-625.
1872 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*, Deichert, Erlangen (trad. it. in «Annali di Matematica», serie II, XVII (1889), pp. 307-49).

Milnor, J. W.
1956 *On manifolds homeomorphic to the seven-sphere*, in «Annals of Mathematics», LXIV, pp. 399-405.

Muir, Th.
1909-23 *The Theory of Determinants in the Historical Order of its Development*, 4 voll., Macmillan, London.

Mumford, D.
1965 *Geometric Invariant Theory*, Academic Press, New York.

Nagata, M.
1959 *On the 14th Problem of Hilbert*, in «American Journal of Mathematics», pp. 766-72.

Siegel, C. L.
1964 *Symplectic Geometry*, Academic Press, New York.

Weyl, H.
1939 *Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton N.J. 1946².

Il **concetto** di invariante è fondamentale sia per la matematica (cfr. **strutture matematiche**) sia per le scienze fisiche e naturali (cfr. **fisica, legge, scienza**) (ma ha anche rilievo nelle discipline linguistiche e antropologiche; cfr. ad esempio **linguaggio, fonetica, natura/cultura**), intimamente legato al concetto di descrizione matematica del **reale**, alla trasformazione dei problemi da qualitativi a quantitativi (cfr. **qualità/quantità**), alle possibilità di **formalizzazione** e di **calcolo** e, piú in generale, al concepimento del rapporto **astratto/concreto**.

Ogni teoria matematica, o forse piú in generale ogni teoria (cfr. anche **teoria/pratica**) è suscettibile d'una lettura in termini di invariante, ma l'esplicazione matematica piú rigorosa è particolarmente legata ai metodi algebrici (cfr. **razionale/algebrico/trascendente**) e geometrici (cfr. **geometria e topologia**). Restringendosi anche a questi argomenti, sono evidenti numerose mediazioni che conducono a vasti campi della fisica (cfr. **quanti, relatività**) o della chimica.

Dalle equazioni algebriche, dallo studio delle **funzioni** simmetriche (cfr. **simmetria**) e dalla teoria di Galois, provengono i primi aspetti importanti della teoria degli invarianti, cosí come dall'algebra lineare (cfr. anche **applicazioni, dipendenza/indipendenza, dualità**) e dallo studio delle forme geometriche, quali le **curve e superfici**, con riguardo alle loro trasformazioni proiettive o piú generali (cfr. anche **trasformazioni naturali / categorie**).

Aspetti importanti della matematica moderna, quali lo studio dei gruppi continui (cfr. **continuo/discreto**), algebrici e classici, la topologia differenziale, l'algebra omologica, la teoria dei fasci (cfr. anche **differenziale**) e, naturalmente, i problemi di classificazione (cfr. **sistematica e classificazione**), mostrano la grande ricchezza del concetto di invariante.